Über die Strömung von Kolloiden, die Zähigkeitsanomalien zeigen

Habilitationsschrift

zur Erlangung der Venia legendi

an der Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Universität Erlangen

vorgelegt von

Dr. phil. Hans Kroepelin

Akademische Verlagsgesellschaft m. b. H.
Leipzig 1930

30·252

Über die Strömung von Kolloiden, die Zähigkeitsanomalien zeigen

Habilitationsschrift

zur Erlangung der Venia legendi

an der Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Universität Erlangen

vorgelegt von

Dr. phil. Hans Kroepelin

Akademische Verlagsgesellschaft m. b. H.
Leipzig 1930

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Sonderdruck aus „Zeitschrift für Physikalische Chemie“
Abteilung A. Band 149, Seite 291—330. 1930.

Die Geschwindigkeitsverteilung einer durch ein gerades Rohr von kreisförmigem Querschnitt strömenden, abnormen Gelatinelösung wird direkt gemessen. Sie weicht von der einer normalen Flüssigkeit in der erwarteten Weise ab. Jedoch hat man auch hier Schichtenströmungen vor sich. Gelatinelösungen, die keine Zähigkeitsanomalien zeigen, haben eine parabolische Geschwindigkeitsverteilung wie normale zähe Flüssigkeiten.

I. Allgemeine Betrachtungen.

Es handelt sich im folgenden um eine Untersuchung an sogenannten „elastischen Flüssigkeiten", die zum Ziel hat, die Vorgänge bei den Strömungen dieser eigenartigen Körperklasse näher aufzuklären.

Solche abnormen Flüssigkeiten, wie sie hier genannt werden sollen, haben ein gemeinsames Kennzeichen. Untersucht man sie in einem Kapillarviskosimeter oder im Zähigkeitsmesser nach COUETTE, so findet man, dass ihre aus den Messungen auf übliche Weise berechnete Zähigkeit keine Stoffkonstante ist, sondern von den Messungsbedingungen abhängt. Bei allen bisher untersuchten abnormen Flüssigkeiten liegt die Abhängigkeit in der gleichen Richtung: je grösser der Druck ist, mit dem man diese Flüssigkeiten durch eine Kapillare von gegebenem Durchmesser und gegebener Länge presst, oder je höher die Geschwindigkeit des bewegten Zylinders im COUETTE-Apparat ist, um so geringer scheint ihre Zähigkeit zu sein.

Trägt man in einem Schaubild die Abhängigkeit der Ablenkung Θ des inneren an einem Draht aufgehängten Zylinders des COUETTE-Apparats von der Drehgeschwindigkeit ω des äußeren auf, so erhält man bei der Untersuchung einer normalen zähen Flüssigkeit eine Gerade durch den Nullpunkt. Da die Ablenkung des inneren Zylinders der Schubspannung verhältnisgleich ist, die an seiner Oberfläche angreift, so ist die Schubspannung τ in einer normalen Flüssigkeit dem Geschwindigkeitsunterschied zwischen zwei benachbarten Schichten verhältnisgleich:

$$\tau = \eta \cdot \frac{dv}{dx}.$$

Das ist der Ansatz von NEWTON; die Konstante η nennen wir die Zähigkeit der Flüssigkeit. Untersucht man eine abnorme Flüssigkeit, die bei kleinen Werten

von ω die gleiche Ablenkung ergibt wie die zähe Flüssigkeit, so sind die Ablenkungen bei wachsendem ω kleiner. In ihr wachsen also die Schubspannungen nicht verhältnisgleich dem Geschwindigkeitsgefälle $\frac{dv}{dx}$, sondern langsamer. Will man die formale Zerlegung der Schubspannung in zwei Faktoren beibehalten:

$$\tau = \alpha \frac{dv}{dx},$$

so ist der Faktor α, den man als scheinbare Zähigkeit bezeichnen kann, keine Konstante, sondern eine Funktion von $\frac{dv}{dx}$.

Diese Abhängigkeit ist bereits von E. Hatschek[1]) erkannt und ausgesprochen worden. Da die Messung im Couette-Apparat einen direkten Zusammenhang zwischen dem Geschwindigkeitsgefälle und der Schubspannung ergibt, wird von H. Freundlich[2]) und seinen Mitarbeitern die Messung mit diesem Apparat bevorzugt. Wo. Ostwald[3]) hingegen hält die Messung in Kapillaren für ebenso geeignet. Er betont, dass man den ganzen Charakter der Abhängigkeit der scheinbaren Zähigkeit aus den Messungen mit dem Kapillarviskosimeter genau so gut erschliessen kann, wie aus den Messungen im Couette-Apparat.

Man erhält unter den mit verschiedenen Kapillaren ausgeführten Messungen auch eine zahlenmässige Übereinstimmung[4])[5]), wenn man als unabhängige Veränderliche das mittlere Geschwindigkeitsgefälle wählt: $\frac{\bar{v}}{a}$. Hier bedeutet $\bar{v}$ die mittlere Strömungsgeschwindigkeit, a den Halbmesser der Kapillaren.

Eine nähere Darlegung dieses Punktes erübrigt sich, da sie von B. Rabinowitsch[6]) vor kurzem in dieser Zeitschrift erfolgt ist. Dieser Autor vermochte an Lösungen von Nitrocellulose in organischen Lösungsmitteln ebenfalls die eindeutige Abhängigkeit der scheinbaren Zähigkeit vom Geschwindigkeitsgradienten zu bestätigen. Es sei noch darauf hingewiesen, dass gleichzeitig mit dem Verfasser und unabhängig von ihm auch W. Haller und V. Trakas[7]) an Tanninlösungen den gleichen Zusammenhang feststellten.

Ähnlichkeitsbetrachtungen.

Es ist zuweilen die Auffassung vertreten worden, dass man durch die Darstellung der scheinbaren Zähigkeit in Abhängigkeit vom Geschwindigkeitsgradienten eine Erweiterung des Reynoldsschen Ähnlichkeitsgesetztes vorgenommen habe. Dem wird man nicht ganz beipflichten können. Das Ähnlichkeitsgesetz für die Strömungsvorgänge in einer zähen Flüssigkeit besagt die mechanische Ähnlichkeit zweier Vorgänge, bei denen die Reynoldssche Zahl die gleiche ist.

---

[1]) E. Hatschek, Koll. Z. **13**, 88. 1913. [2]) H. Freundlich, Z. physikal. Ch. **108**, 153. 1924. [3]) Wo. Ostwald, Z. physikal. Ch. **111**, 62. 1924. [4]) Koll. Z. **47**, 294. 1929. [5]) Ber. Dtsch. chem. Ges. **62**, 3056. 1929. [6]) B. Rabinowitsch, Z. physikal. Ch. **145**, 19f. 1929. [7]) W. Haller und V. Trakas, Koll. Z. **47**, 304. 1929.

Die Reynoldssche Zahl ist aber im wesentlichen nichts anderes als ein Massstab für das Verhalten der Trägheitskräfte zu den durch die Zähigkeit bedingten Kräften.

Die auftretenden Reibungskräfte sind proportional der Zähigkeit und der mittleren Geschwindigkeit und umgekehrt proportional dem Durchmesser der Kapillare. Die Massenkräfte sind bestimmt durch das Quadrat der Geschwindigkeit und die Dichte. Ihr Verhältnis ist demnach verhältnisgleich zu $\Re = \frac{\varrho \cdot \bar{v} \cdot a}{\eta}$; das ist aber nichts anderes als die Reynoldssche Zahl. In der gewählten Darstellung der scheinbaren Zähigkeit in Abhängigkeit von der Grösse $\frac{\bar{v}}{a}$ handelt es sich aber allein um die Reibungskräfte. Man kann sich das folgendermassen klar machen: wir betrachten die Strömungsgeschwindigkeit v in Abhängigkeit vom Radius r. Bei einer abnormen Flüssigkeit haben wir zu jedem Wert von r einen anderen Wert der scheinbaren Zähigkeit α einzusetzen, da α vom Geschwindigkeitsgefälle $\frac{dv}{dr}$ an jedem Punkt abhängt. Wenn die Geschwindigkeit v vergrössert wird, wachsen auch Werte von $\frac{dv}{dr}$.

Ändert man nun auch r im gleichen Masse, so bleiben die Werte für $\frac{dv}{dr}$ die gleichen für alle die Punkte, für die $\frac{r}{a}$ den gleichen Wert hat. (r bedeutet die laufende Veränderliche, a wie stets den Halbmesser des Rohres, hier also den Höchstwert von r.) Das bedeutet aber, dass die verhältnismässige Verteilung der α über den Rohrquerschnitt und damit auch ihr Integralmittelwert der gleiche ist wie bei der kleineren Geschwindigkeit.

Was hierdurch geleistet wird, ist also nicht mehr als eine vernünftige dimensionslose Darstellung des Geschwindigkeitsprofils.

Es scheint deshalb nicht angebracht, eine Parallele zum Reynoldsschen Ähnlichkeitsgesetz ziehen zu wollen, dessen Bedeutung von ganz anderer Grössenordnung ist.

Aus dem eben Gesagten geht hervor, dass die Auffassung von H. Freundlich nicht unberechtigt ist, dass die Messungen im Couette-Apparat am besten den direkten Zusammenhang zwischen Geschwindigkeitsgradient und Schubspannung darstellen. Wie man aus Durchflussversuchen diesen Zusammenhang errechnen kann, haben K. Weissenberg[1]) und Mitarbeiter gezeigt, und B. Rabinowitsch[2]) an einem Beispiel durchgeführt.

Grundsätzlich ist natürlich die Messung im Kapillarviskosimeter mit der im Couette-Apparat gleichberechtigt. Bei beiden Methoden

---

[1]) R. Eisenschitz, B. Rabinowitsch und K. Weissenberg, Mitt. d. deutschen Materialprüfungsanst. Sonderh. IX, 21. 1929. [2]) B. Rabinowitsch, Z. physikal. Ch. **145**, 1. 1929.

misst man ja nichts anderes als Schubspannungen in Abhängigkeit vom Geschwindigkeitsgradienten. Nur die Berechnungsweise ist bei beiden Methoden eine etwas andere.

Über turbulente und laminare Strömung.

a) Allgemeines.

Bei der ganzen vorstehenden Betrachtung ist angenommen worden, dass wir es auch bei den abnormen Flüssigkeiten im Gebiet kleiner Geschwindigkeiten mit Schichtenströmungen zu tun haben.

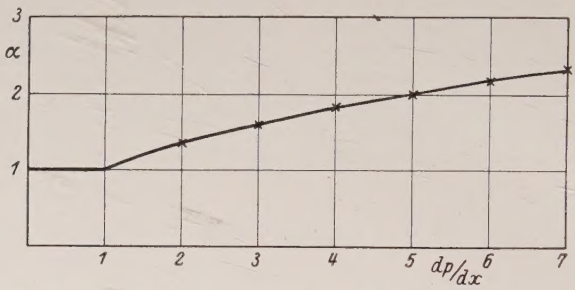

Fig. 1. Abhängigkeit der scheinbaren Zähigkeit einer normalen Flüssigkeit vom Druckgefälle. Das Druckgefälle, bei dem Turbulenz eintritt, ist gleich *1* gesetzt.

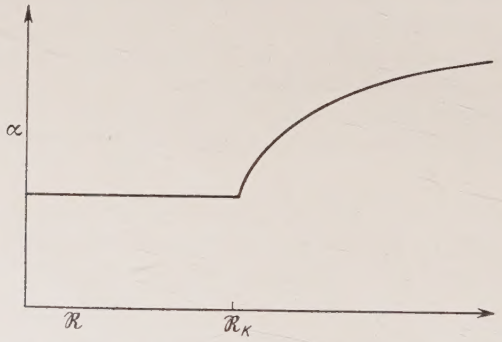

Fig. 2. Scheinbare Zähigkeit α einer normalen Flüssigkeit in Abhängigkeit von der Reynoldsschen Zahl $\Re$. $\Re_K$: Kritische Reynoldssche Zahl ($\sim$1200).

Die weiter unten mitgeteilten Versuche beweisen, dass die gemachten Voraussetzungen stimmen. Eine Ähnlichkeit mit der turbulenten Strömung ist also demnach auch bei abnormen Flüssigkeiten im Gebiet der von Wo. Ostwald[1]) so genannten „Strukturviskosität" nicht

[1]) Wo. Ostwald, Koll. Z. **43**, 190. 1927.

zu erwarten. Mag auch das Geschwindigkeitsprofil im Vergleiche zu dem einer zähen Flüssigkeit abgeflacht erscheinen, so ist die Ähnlichkeit mit dem ebenfalls sehr flachen Geschwindigkeitsprofil der turbulenten Strömung doch nur rein äusserlich. Vor allem ist der starke Geschwindigkeitsanstieg in der Nähe der Wand hier nicht zu finden, der für turbulente Strömungen am meisten kennzeichnend ist.

Bei der Schichtenströmung wird die Schubspannung dadurch hervorgerufen, dass Moleküle aus einer Schicht einer kleineren Geschwindigkeit in eine mit höherer Geschwindigkeit hineindiffundieren. Bei der turbulenten Strömung geschieht der Impulstransport von einer Schicht zur anderen nicht durch einzelne Moleküle, sondern durch grössere Wirbelballen. Die Schubspannung ist dem Mittelwert des Produkts aus der Geschwindigkeit in der Strömungsrichtung und der Übertrittsgeschwindigkeit der Wirbelballen, von Schicht zu Schicht, senkrecht zur Strömung, verhältnisgleich.

So grundsätzlich verschieden, wie der Mechanismus der Impulsübertragung im Fall der laminaren und turbulenten Strömung ist, so verschieden ist auch der makroskopische Zusammenhang zwischen dem Druck und der scheinbaren Zähigkeit.

Man kann ja auch bei Versuchen über die Turbulenz so vorgehen, dass man genau wie bei der Untersuchung der abnormen Flüssigkeiten die scheinbare Zähigkeit aus Druck und Durchflussmenge berechnet, derart, dass man die gefundene Durchflussmenge mit derjenigen vergleicht, die eine normale Flüssigkeit haben würde, wenn ihre Durchflussmenge stets dem Druck verhältnisgleich bliebe. Man findet dann bekanntlich, dass im Augenblick des Einsetzens der Turbulenz die scheinbare Zähigkeit stark ansteigt. Eine sinnbildliche Darstellung gibt Fig. 1. Hingegen ist in der Fig. 2 die scheinbare Zähigkeit a in Abhängigkeit von der Reynoldsschen Zahl gegeben. Man sieht, dass bei wachsendem Druck bzw. bei wachsender Reynoldsscher Zahl die scheinbare Zähigkeit stark ansteigt.

b) Die Widerstandszahl.

Ganz anders verhält es sich, wenn man die Abhängigkeit der sogenannten Widerstandszahl von der Reynoldsschen Zahl im laminaren und turbulenten Gebiet betrachtet. Die Widerstandszahl ist, wie schon ihr Name sagt, eine reine Zahl, die seiner Zeit aus Zweckmässigkeitsgründen eingeführt wurde. Sie ist durch folgende Gleichung bestimmt:

$$\Delta p = \lambda \frac{\bar{v}^2}{2g} \cdot \frac{l}{2a\Re}.$$

In dieser Gleichung bedeuten Δp den treibenden Druck, gemessen in Zentimeter Flüssigkeitssäule der untersuchten Flüssigkeit; λ die Widerstandszahl; g die Schwerebeschleunigung und l die Länge des Rohres. $\bar{v}$ und a haben die frühere Bedeutung. Diese Beziehung will folgendes besagen: $\frac{\bar{v}^2}{2g}$ ist die sogenannte Geschwindigkeitshöhe der mittleren Geschwindigkeit. Bekanntlich ist die Geschwindigkeit einer unter ihrem eigenen Gewicht ausströmenden Flüssigkeit

$$v = \sqrt{2gH}; \quad H = \frac{v^2}{2g},$$

wenn H die Höhe der Flüssigkeitssäule bedeutet. Deshalb kann man statt der Geschwindigkeit auch die Grösse H angeben; diese heisst darum die Geschwindigkeitshöhe. Ferner weiss man auch ohne nähere Kenntnis des Widerstandsgesetzes, dass man zur Erzielung der gleichen Strömungsgeschwindigkeit für ein längeres Rohr einen höheren, für das weitere Rohr einen niedrigeren Druck wird aufzuwenden haben. Daher ist die Grösse $\frac{l}{2a}$ herausgezogen. Bringt man nun l in der Bestimmungsgleichung für λ auf die linke Seite der Gleichung, so steht links das Druckgefälle. Hierfür kann man aus der HAGEN-POISEUILLEschen Gleichung einführen:

$$\frac{\Delta p}{l} = \frac{8\eta\bar{v}}{\varrho \cdot a^2};$$

Hiermit berechnet sich die Widerstandszahl λ, wenn wir noch die REYNOLDSsche Zahl als Veränderliche einführen, zu:

$$\lambda = \frac{32}{\Re}.$$

Die Widerstandszahl fällt also bei laminarer Strömung umgekehrt verhältnisgleich der REYNOLDSschen Zahl ab; oder bei einem gegebenen Rohr und gegebener Flüssigkeit umgekehrt verhältnisgleich mit der mittleren Geschwindigkeit $\bar{v}$. Im Gebiet der Turbulenz ($\Re > 1200$) gilt in einem grossen Bereich das von H. BLASIUS festgestellte Gesetz: $\lambda = 0{\cdot}2661 \cdot \Re^{-0{\cdot}25}$.

Unter Benutzung dieses Wertes erhält man für die Abhängigkeit des Druckgefälles von der mittleren Geschwindigkeit im turbulenten Gebiet[1]):

$$\frac{\Delta p}{l} = \text{const}\, \bar{v}^{7/4}.$$

Man sieht also, dass das Druckgefälle im turbulenten Gebiet mit einer höheren Potenz der mittleren Geschwindigkeit anwächst als im laminaren. Das für eine gegebene Durchflussmenge bzw. mittlere Geschwindigkeit aufzuwendende Druckgefälle ist aber als Mass für den Widerstand der Strömung anzusehen. Der Widerstand steigt also bei laminarer und turbulenter Strömung auf jeden Fall wenigstens verhältnisgleich der Geschwindigkeit an. Irgendeine Ähnlichkeit mit den bei abnormen Flüssigkeiten beobachteten Erscheinungen besteht also nicht.

Es schien also notwendig, die Strömungen abnormer Flüssigkeiten genauer zu untersuchen, besonders auch im Hinblick auf die von Wo. OSTWALD geäusserte Ansicht, dass Schichtenströmungen bei kolloiden Lösungen (auch wenn diese keine Zähigkeitsanomalien zeigen) sehr unwahrscheinlich sind[2]).

Der Versuchsplan.

Dazu war es vor allem notwendig, die Geschwindigkeitsverteilung in einer durch ein gerades Kreisrohr strömenden abnormen Flüssigkeit

[1]) In der Arbeit von Wo. OSTWALD (Koll. Z. **43**, 204. 1927) ist durch einen Druckfehler das Vorzeichen des Exponenten $\frac{7}{4}$ negativ. [2]) Wo. OSTWALD, Koll. Z. **43**, 201. 1927.

direkt zu messen. Ferner schien es von Interesse, auch die Geschwindigkeitsverteilung im Zähigkeitsmesser nach COUETTE durch Versuche nachzuprüfen. In der vorliegenden Arbeit wird über die Messung des Geschwindigkeitsprofils von Gelatinelösungen im geraden Kreisrohr berichtet.

Das Gelatinesol gehört zu denjenigen Solen, deren Zähigkeit verhältnismässig empfindlich ist gegen mechanische Einflüsse. Gerade auf dieses Sol schienen die Betrachtungen von WO. OSTWALD[1]) besonders gut anwendbar zu sein. Wenn bei den Solen turbulente Strömungen besonders bevorzugt sein sollten, so war gerade bei Gelatine das am ersten zu erwarten. Als die Versuche begonnen wurden, war es ausserdem noch in keiner Weise sichergestellt, dass sich die geplanten Messungen überhaupt würden durchführen lassen. Es konnte ja sein, dass die Sole, die Zähigkeitsanomalien zeigen, in Wirklichkeit gar keine richtigen Flüssigkeiten sind, sondern feste Körper, mit einer ausserordentlich niedrig liegenden Zerreissfestigkeit und Fliessgrenze. Die Bemerkung von WO. OSTWALD[2]), dass gerade im „Strukturgebiet" die Messungen zu streuen pflegen, konnte bedeuten, dass die ganze Erscheinung vorwiegend durch Zerreissen makroskopischer Strukturen hervorgebracht würde. In diesem Falle wären die geplanten Messungen sinnlos gewesen. Man konnte sich die schnellste Aufklärung von der Untersuchung eines solchen Systems versprechen, das wie die Gelatine verhältnismässig ungünstige Eigenschaften in Ansehung des vorliegenden Zweckes hatte. Traten bei der Untersuchung von Gelatine keine Schwierigkeiten auf, so waren bei anderen Solen auch keine zu erwarten.

Baumwollgelb wurde zur Untersuchung in Aussicht genommen, weil bei ihm von WO. OSTWALD die sogenannte „Strukturturbulenz" festgestellt war; d. h. die scheinbare Zähigkeit nahm bei steigenden Geschwindigkeiten erst ab, dann folgte ein starker Anstieg, dem sich dann ein weiterer Abfall anschloss. Das Benzopurpurinsol sollte als Vertreter der Stäbchensole untersucht werden.

Es wäre vielleicht das Vanadinpentoxydsol eher ein kennzeichnender Vertreter der Stäbchensole gewesen, allein es waren zu den Versuchen 300 Liter Lösung notwendig. Deren Herstellung bildete überhaupt die grösste Schwierigkeit der ganzen Arbeit, da man die Erfahrungen, die man bei der Herstellung kleiner Mengen gemacht

[1]) WO. OSTWALD, Koll. Z. 43, 190. 1927. [2]) WO. OSTWALD, Koll. Z. 43, 179. 1927.

hatte, nicht ohne weiteres ins Grosse übertragen konnte. Alle Lösungen wurden durch ein feines Sieb von etwa $^1/_3$ mm Maschenweite filtriert, um gröbere Verunreinigungen fernzuhalten.

II. Messverfahren und Versuchsanordnungen.

A. Die Messung im Rohr.

1. Grundlage des Messverfahrens.

Die Messung der Geschwindigkeitsverteilung wurde auf die in der Hydromechanik übliche Weise durch Messung des Staudrucks mittels Pitot-Röhren ausgeführt. Man bringt in die Strömung ein zugeschärftes rundes Röhrchen von kleinem Durchmesser. Die Flüssigkeit steigt in einem nach oben gebogenen Schenkel des Rohres so hoch, bis die Höhe der Flüssigkeitssäule gleich der Geschwindigkeitshöhe der strömenden Flüssigkeit an dem Punkte der Strömung ist, an dem sich die Mündung des Pitot-Rohres befindet. Misst man die Höhe der Flüssigkeitssäule in Zentimetern, so wird die Geschwindigkeit in cm/sek.:

$$v = 44{\cdot}3\sqrt{h} \cdot \text{cm/sec}.$$

Die Messungen sind um so genauer, je kleiner der Mündungsdurchmesser des Pitot-Rohres ist, namentlich wenn der Geschwindigkeitsgradient gross ist. Die Messungen dieser Arbeit wurden mit Pitot-Röhren von 0·5 mm Durchmesser ausgeführt. Erfahrungen von anderer Seite[1]) haben gezeigt, dass die Messung recht genau die Geschwindigkeit in der Achse des Pitot-Rohres gibt, solange dies sich in seinem ganzen Querschnitt in der Strömung befindet. Ragt es mit einem Teil seines Querschnittes aus der Strömung heraus, so muss eine Korrektur angebracht werden. Ferner müssen die Angaben enger Pitot-Rohre bei kleinen Geschwindigkeiten (unterhalb etwa 6 cm/sek.) nach den Untersuchungen Muriel Barkers[2]) berichtigt werden. Diese Berichtigung spielt bei diesen Messungen keine Rolle.

Ferner wird die verhältnismässige Genauigkeit wachsen, je grösser der Durchmesser des Versuchsrohres ist, in dem die Geschwindigkeitsverteilung gemessen werden soll, da auch die Stellung des Pitot-Rohres auf dem Durchmesser nur mit einer kleinen Ungenauigkeit angegeben werden kann. Da diese Ungenauigkeit im absoluten Betrag feststeht, fällt sie um so weniger ins Gewicht, je grösser der Durchmesser des Rohres ist. Es wurden deshalb Messingrohre von 6, 8 und 10 mm Durchmesser benutzt.

[1]) Für diese Mitteilung danke ich Herrn Prof. Prandtl und Dr. Nikuradse.
[2]) M. Barker, Proc. Roy. Soc. **101**, 435. 1922.

2. Die Gesamtanordnung für die Messung im Rohr.

Einen Überblick über die gesamte Anordnung gibt die Fig. 3. Aus einem Vorratsgefäss wurde mit Hilfe einer Flügelpumpe die Flüssigkeit in den WEISSBACH-Apparat *A* gepumpt. Der Apparat trägt an seiner Vorderseite drei durch Ventile verschliessbare Öffnungen. Die oberste war bei den Versuchen mit Wasser an eine Überlaufvorrichtung angeschlossen; bei der Untersuchung von Solen

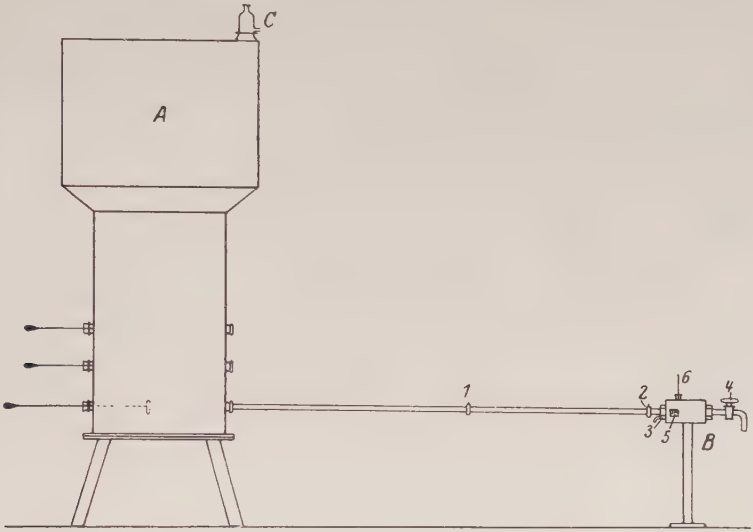

Fig. 3. Skizze der Gesamtanordnung.

A: Weissbach-Apparat; *B*: Messkasten; *C*: Flasche für Spülwasser; *1*, *2*: Messstellen am Rohr; *3*: Anbohrung am Gewindestück des Rohres; *4*: Regulierhahn; *5*: Schauglas; *6*: Pitotrohr.

wurde hier der Zulauf zu dem weiter unten beschriebenen Versuchskanal angebracht. An der mittleren Öffnung sass der Wasserstandsanzeiger. An die unterste Öffnung wurde das Versuchsrohr angeschlossen.

Die Rohre waren aus Messing gezogen und hatten eine Wandstärke von etwa 1·2 mm. Sie hatten eine gesamte Länge von 165 cm (vgl. Fig. 4). An dem auf der Figur linken Ende trugen sie ein aus einer Messingplatte gedrehtes Einlaufstück *a*, das einen sanft abgerundeten Einlauf hatte. Vermittels einer Überwurfmutter wurden sie in der untersten Öffnung des WEISSBACH-Apparates befestigt. Auf der rechten Hälfte trug das Rohr zwei Messstellen zur Messung des Druckgefälles. Beide Stellen waren 75 cm voneinander entfernt; sie waren derart eingerichtet,

dass das Rohr an vier um 90° auseinanderliegenden Stellen angebohrt war. Über diese Bohrung war ein Hohlring geschoben, der einen kleinen Rohrstutzen trug.

Gleich hinter der zweiten Messstelle trug das Rohr ein Gewindestück, mit dem es in den Messkasten B eingeschraubt war, in dem das Pitot-Rohr beweglich angeordnet war. Dieses Gewindestück war ebenfalls mit einer dünnen Bohrung versehen, so dass man den statischen Druck im Austrittsquerschnitt des Rohres messen konnte.

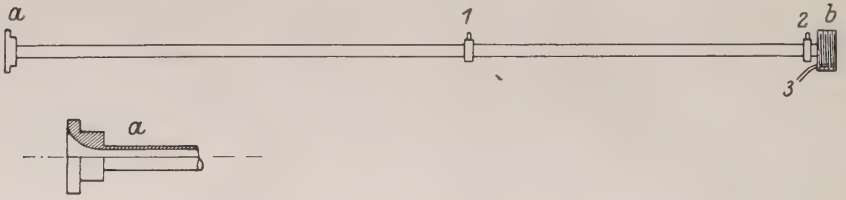

Fig. 4. Das Versuchsrohr.

a: Einlaufstück; *b*: Gewindestück; *1, 2*: Messstellen für den Druckabfall; *3*: Anbohrung zur Messung des Druckes im Auslaufquerschnitt.

Das Pitot-Rohr konnte durch geeignete Führungen in wagerechter und senkrechter Richtung messbar verschoben werden. Da seine Mündung gerade im Austrittsquerschnitt des Versuchsrohres lag, so wurde der Staudruck selbst angezeigt durch das Manometer, wenn sein einer Schenkel mit der Anbohrung des Gewindestückes, der andere mit dem Pitot-Rohr verbunden war.

3. Gründe für die Gestaltung des Rohres.

Die Gründe für die Gestaltung des Rohres waren diese: bekanntlich stellt sich die Geschwindigkeitsverteilung nicht sofort beim Eintritt in das Rohr her, sondern benötigt zu ihrer Ausbildung eine gewisse Anlaufstrecke. Im Einlaufquerschnitt strömt die ganze Flüssigkeit gleich schnell, als wenn gar keine Reibung vorhanden wäre. Diese macht sich allmählich von den Wänden ausgehend bemerkbar, bis ihre Wirkung in die Mitte reicht und damit die Geschwindigkeitsverteilung ausgebildet ist. Die Länge der Anlaufstrecke bestimmt sich nach Schiller[1]) zu:

$$x = 0{\cdot}115\, a \cdot R.$$

Da die Strömung in der Anlaufstrecke einen grösseren Widerstand hat, als wenn sie schon ausgebildet wäre, so tritt dort ein zu-

[1]) H. Schiller, Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, Heft 248, 1922. Z. angew. Math. u. Mechanik **2**, 96. 1922.

sätzlicher Druckverlust auf. Dieser ist nach SCHILLER 1·16 Geschwindigkeitshöhen, wozu noch 1 Geschwindigkeitshöhe kommt wegen der Beschleunigung der Flüssigkeit im Einlauf. Deshalb mussten auch beide Messstellen für das Druckgefälle aus dem Anlauf herausgelegt werden. Für den besonderen vorliegenden Zweck hatte diese Anordnung noch einen weiteren Vorteil. Betrachtete man die abnormen Flüssigkeiten als festen Körpern ähnlich, so war der Gedanke naheliegend, dass sie bei der Zähigkeitsmessung am Anfang des Rohres plastiziert würden, und dann annähernd wie Flüssigkeiten weiter strömten. Bei der hier getroffenen Anordnung der Messstellen für das Druckgefälle war man von dem Einwand befreit, dass man eine Plastizierungsarbeit und eine Zähigkeit nebeneinander misst. Bei Kautschuklösungen war ja schon bewiesen, dass so etwas nicht in Frage kam, weil die Messungen so durchgeführt waren, dass immer dieselbe Flüssigkeitsmenge zu der Messung benutzt wurde. Irgendwelche Plastizierung hätte sich sofort in einem Abfall der scheinbaren Zähigkeit kundgeben müssen. B. RABINOWITSCH hat sich so gesichert, dass er nicht nur mit einer Kapillarenlänge bei verschiedenem Druckgefälle mass, sondern sich in verschieden langen Kapillaren gleiche Druckgefälle herstellte. Er konnte nämlich bei seiner Anordnung nicht dieselbe Flüssigkeitsmenge für einen durchgehenden Versuch verwenden.

Einen anderen Einfluss der Kapillarenlänge hat vor einiger Zeit H. STAUDINGER[1]) festgestellt. Der Verfasser[2]) hat versucht, diese Beobachtungen zu deuten. Bei der Fortsetzung dieser Untersuchung wird die Richtigkeit der gemachten Annahmen nachgeprüft werden.

Die Manometer.

Die Manometer bestanden aus U-förmig gebogenen Glasröhren von etwa 1 cm Weite und 50 cm Länge. Zu jedem Schenkel führte ein Gummischlauch, der mit einer Messstelle verbunden war. Man las also direkt die Druckdifferenz zwischen den Messstellen ab. Hinter den Glasrohren befand sich ein in $^1/_2$ mm geteilter Massstab und ein Spiegel, der eine parallaxenfreie Ablesung ermöglichte.

Für die Messung der Geschwindigkeitsverteilung genügte ein solches Manometer nicht. Die Ablesegenauigkeit war ungefähr $^1/_2$ mm.

---

[1]) H. STAUDINGER und W. HEUER, Ber. Dtsch. chem. Ges. **62**, 2937. 1929.

[2]) H. KROEPELIN, Ber. Dtsch. chem. Ges. **62**, 3061. 1929.

Der Fehler der Messung ist um so kleiner, je höher die zu messende Geschwindigkeit ist. Da die Geschwindigkeit v gleich ist

$$v = \sqrt{2gh},$$

so ergibt sich durch Differenzierung:

$$dv = \frac{1}{2\sqrt{2gh}} \cdot dh = \frac{1}{2v} dh.$$

Der Messfehler ist also der Geschwindigkeit selbst umgekehrt verhältnisgleich. Das geschilderte Manometer konnte also nur bis zu Geschwindigkeiten von etwa 25 cm mit Vorteil benutzt werden.

Für die kleineren Geschwindigkeiten wurde ein Mikromanometer benutzt. Es war genau so gebaut wie das eben beschriebene grosse Manometer. Es war jedoch nur 20 cm lang; das Glasrohr hatte 4 mm Durchmesser und trug direkt eine Millimeterteilung. Die Rückseite war mit Milchglas überfangen. Dieses kleine Manometer konnte messbar geneigt werden. Die richtige Einstellung des Manometers wurde dadurch nachgeprüft, dass sich die Menisken in beiden Schenkeln gleich hoch einstellen mussten, wenn diese direkt miteinander verbunden waren. Wenn während der Messung die Schräglage des Manometers geändert werden musste, so wurde stets zur Kontrolle ein Druck bei zwei Neigungen gemessen.

Besondere Vorkehrungen (Spülvorrichtung).

Die bis hierher beschriebene Anordnung ist die gleiche, wie man sie für die Untersuchung einer normalen Flüssigkeit treffen würde; für die Versuche an abnormen Flüssigkeiten mussten noch weitere Vorkehrungen getroffen werden. Es war ja durchaus möglich, dass die untersuchten Systeme eine gewisse Festigkeitsgrenze zeigten. Kamen sie in die Messstellen oder in die Verbindungsleitungen zu den Manometern, so konnten sie grosse Fehler verursachen, dadurch dass der Druck in Wirklichkeit grösser war als der abgelesenen Höhe der Flüssigkeitssäule im Manometer entsprach. Es war deshalb unbedingt nötig Vorsorge zu treffen, dass sich in den Manometern, den Leitungen und den Messstellen, vor allem in dem engen Pitot-Rohr, nur Wasser befand. Dieses wurde auf folgende Weise erreicht: Oben auf den Weissbach-Apparat wurde eine tubulierte Flasche C (Fig. 3) gestellt, die mit Wasser gefüllt war. Mit diesem Wasser von höherem Druck wurden die Manometer gefüllt, während sie von den Messstellen abgeschlossen waren. Darauf wurde die Verbindung mit der Wasser-

flasche unterbrochen und mit den Messstellen hergestellt. Das Wasser aus den Manometern floss durch die Messstellen solange aus, bis sich der richtige Druck im Manometer eingestellt hatte. Durch das ausströmende Wasser wurden die Messstellen gespült, so dass sich in ihnen, sowie in der Leitung zum Manometer stets nur reines Wasser befand. Ferner hat man bei dieser Anordnung noch den Vorteil, dass man die Manometereinstellung nachführen kann. Trotzdem benötigen die Messungen an den kolloiden Lösungen noch geraume Zeit. Man hat gleichzeitig darauf zu achten, dass die Durchflussmengen die gleichen bleiben und muss jeden Punkt mehrmals messen. Besonders die Messungen der kleinen Geschwindigkeiten sind sehr langwierig, weil das Manometer verhältnismässig langsam folgt. Je länger aber das PITOT-Rohr in der Strömung steht, um so grösser ist die Wahrscheinlichkeit, dass es sich durch Gelflöckchen verstopft, die sich über seine Mündung hängen. Die Messung eines Geschwindigkeitsprofils nahm durchschnittlich 8 bis 12 Stunden in Anspruch.

Einen grossen Nachteil hatte freilich das ganze Messverfahren; es war sehr langwierig und verhältnismässig ungenau bei kleinen Geschwindigkeiten. Gerade die kleinen Geschwindigkeitsgradienten schienen jedoch besonders interessant. Es war bei den grossen Rohrdurchmessern möglich, die scheinbare Zähigkeit aus Durchflussversuchen zu bestimmen in einem solchen Gebiet der Gradienten, das auch mit dem COUETTE-Apparat erreichbar war. Bisher sind keine Messungen veröffentlicht, bei denen sich die Messbereiche dieser beiden Anordnungen überschnitten hätten. Es schien deshalb besonders wichtig, einen Vergleich derselben Lösung in beiden Apparaten zu machen.

B. Der Versuchskanal.

Weil aber die Messung der Geschwindigkeitsverteilung im Rohr bei diesen kleinen Geschwindigkeiten zu ungenau geworden wären, wurde zu einem Ausweg geschritten. Es wurde nämlich ein Kanal von geeigneten Abmessungen gebaut, an dessen Oberfläche die Geschwindigkeitsverteilung der Strömung durch aufgestreute Aluminiumbronze sichtbar gemacht wurde. Der Kanal war so tief, dass die Strömung auf seiner Oberfläche vom Boden her nicht mehr beeinflusst wurde und so einer Strömung zwischen unendlich ausgedehnten parallelen Wänden entsprach.

a) Die Geschwindigkeitsverteilung im unendlich tiefen Kanal.

Auch die Geschwindigkeitsverteilung in diesem Falle ist parabolisch, wie man leicht aus folgender Überlegung sieht:

$$-\tau \cdot 2 \cdot h \cdot l = \frac{dp}{dx} \cdot 2y \cdot \lambda l; \qquad \tau = \eta \frac{dv}{dy},$$

$$-\eta \frac{dv}{dy} = \frac{dp}{dx} \cdot y,$$

$$-dv = \text{const} \cdot y\,dy,$$

$$v = -\frac{1}{2} y^2 \cdot \text{const} + \text{Const},$$

$$0 = -\frac{1}{2} y^2 \cdot \text{const} + \text{Const},$$

$$\text{Const} = \frac{1}{2} y^2 \,\text{const},$$

$$v = \text{const}\,(y^2 - y^2).$$

b) Der Aufbau des Kanals.

In einem grösseren mit Blech ausgeschlagenen Holzkasten befand sich der eigentliche Kanal, der aus zwei parallelen Holzbrettern bestand, die paraffiniert waren. Eine sehr gute Paraffinierung war die Vorbedingung für hinreichend genaue Messungen. Die Flüssigkeit durfte sich auf keinen Fall an den Wänden kapillar hochziehen. Der Zufluss befand sich auf dem einen Ende im Boden des grösseren Kastens. Dadurch, dass der eintretende Flüssigkeitsstrahl senkrecht nach oben ging, während die Strömung im Kanal wagerecht verlief, wurde vermieden, dass sich etwa unter der Oberfläche eine strahlartige Strömung ausbildete, wie es hätte sein können, wenn die Flüssigkeitszuführung ebenfalls in wagerechter Richtung erfolgt wäre. Einige Zentimeter hinter dem Zufluss befand sich ein Gleichrichter, der den Zweck hatte, grössere Wirbel zu unterdrücken. Er bestand aus einer ganzen Anzahl länglicher Zellen von Quadratquerschnitt von etwa 5 cm Länge und war aus Weissblech gefertigt. Hinter dem Gleichrichter folgte ein engmaschiges Sieb. Die Einströmung in den eigentlichen Kanal wurde durch sanft gebogene Bleche geleitet.

Am anderen Ende war der Kanal durch ein Brett abgeschlossen, welches über die ganze Breite des äusseren Kastens reichte. Rechts und links vom Kanal war es nur 1 cm niedriger als die Kanalwände. In der Mitte, wo es den eigentlichen Kanal abschloss, war es noch 2 cm niedriger. So konnte die Strömung im Kanal unter einem Druckabfall von höchstens 2 cm stattfinden. Die Länge des Kanals war 120 cm bei einer Breite von 1·5 cm, damit eine genügend grosse Anlauflänge zur Verfügung stand und wirklich eine ausgebildete Strömung beobachtet werden konnte.

c) Die Geschwindigkeitsmessung im Lichtbild.

Die Messung der Geschwindigkeit der aufgestreuten Aluminiumteilchen geschah photographisch. Es wurde ein mit einem Zeiss-Tessar (relative Öffnung 4·5) ausgrüsteter Apparat so über dem Kanal montiert, dass das Bild annähernd natürliche Grösse erreichte. Der Verschluss war geeicht worden und zeigte nur sehr geringe Fehler. Die Beleuchtung geschah durch zwei 150 W-Nitralampen. Es war sehr wichtig, die Flüssigkeitsoberfläche in richtiger Weise zu bestreuen. Die Aluminiumbronze musste in kleinen, nicht zu grossen Inselchen auf der Flüssigkeit schwimmen und deren Zahl durfte nicht so gross sein, dass die Flüssigkeitsbewegung gestört wurde. Damit die leuchten-

Tabelle 1. Photographische Messung des Geschwindigkeitsprofils im Versuchskanal.

Gemessene Geschwindigkeit in Millimetern; r Abstand von der Mitte in Millimetern; $y = \frac{r}{a}$; a = halbe Breite des Kanals; auf die Höchstgeschwindigkeit bezogene Geschwindigkeit, beobachtet und berechnet. In der letzten Spalte ist der Querschnitt angegeben, in dem die Geschwindigkeiten gemessen sind. Alle Angaben beziehen sich auf das vergrösserte Lichtbild. Um die tatsächlichen Geschwindigkeiten zu finden, sind alle Werte im Verhältnis von 15:25·5 zu verkleinern. $\mathfrak{v}_m = 12{\cdot}5$.

$\mathfrak{v}$	r	$\frac{r}{a}$	$\frac{\mathfrak{v}}{\mathfrak{v}_m}$ gem.	$\frac{\mathfrak{v}}{\mathfrak{v}_m}$ ber.	Querschnitt-Nr.
5	10	77	40	41	I
11	4	31	88	91	VI
10	5	38·5	80	85	V
4·8	10·5	81	37	36	V
6·5	8·5	65	52	57·5	VI
6	9·5	73	48	47·6	VI
11	5	38·5	88	87	VII
9·8	6·8	52	78	73	VII
4·5	10·5	81	36	34	VII/VIII
7	8·5	65	56	58	VII/VIII
9·5	7	54	76	71	VIII
4·8	10·3	79	38	37·5	VIII
8·5	8	61	68	63	IX
10	6	46	80	79	IX
6·5	9·5	73	52	47	IX
5	10	77	40	40·5	IX
6·8	9·2	71	54	50	IX
11	5	38·5	88	85	IX
8	8	61·5	64	62	IX
4·8	10	77	38	40·5	X
12	1·5	16	96	97	
8·5	7·5	57·5	67	68	X

den Flitter sich genügend vom Hintergrund abhoben, durfte die Belichtungszeit nur $^1/_2$ Sekunde betragen. Zur bequemeren Auswertung wurden die Aufnahmen auf extra hartes Papier vergrössert und darauf unter Zuhilfenahme eines Stechzirkels auf $^1/_2$ mm genau ausgemessen. Die Zehntelmillimeter wurden geschätzt.

Die in der Tabelle 1 wiedergegebenen Messungen der Geschwindigkeitsverteilung an Wasser zeigen, dass die erwartete parabolische Verteilung auch beobachtet wird, und dass der Aufbau in Ordnung ist.

C. Der Couette-Apparat.

Ferner wurde ein Zähigkeitsmesser nach COUETTE benutzt, der in der von HATSCHEK verbesserten Form im Kaiser-Wilhelm-Institut für physikalische Chemie in Berlin-Dahlem nach den dortigen Erfahrungen gebaut war.

Es wurde als lästig empfunden, dass das Zentrieren des Apparates im Verhältnis zu den Messungen zu lange Zeit in Anspruch nimmt. Da der Zentrierkopf sich genau über den Zylindern befindet und verhältnismässig gross ist, kann man durch einen Blick von oben die geschehene Zentrierung nicht feststellen.

Es wurde infolgedessen eine kleine, aber sehr wesentlich erscheinende und sehr viel Zeit ersparende Veränderung an dem Apparat angebracht. Die ganze Zentriervorrichtung wurde an einer Führung befestigt, die mit Schraube und Trieb senkrecht auf- und abbewegt werden konnte. Unten wurde auf den äusseren Zylinder eine Zentrierschablone gelegt. Dieses war ein in der Mitte geteiltes Messingplättchen, das auf der Unterseite auf den Durchmesser des äusseren Zylinders abgedreht war, so dass es genau hineinpasste. Das ganze Plättchen war dann genau zentrisch durchbohrt worden. Der Durchmesser der Bohrung war ein ganz klein wenig grösser als der Durchmesser des inneren Zylinders. Dann liess man an drei Punkten der Bohrung einige Tröpfchen Lötzinn auffliessen und schabte diese sorgfältig mit dem Taschenmesser bis der innere Zylinder gerade durch die Bohrung ging. Nachdem der Apparat senkrecht aufgestellt war (was sich mit seinen drei Fussschrauben leicht bewerkstelligen liess), wurde am Zentrierkopf der innere Zylinder so eingestellt, dass er beim Senken der Zentriervorrichtung mittels des Triebes genau durch die Bohrung ging. Steht der Apparat nicht genau senkrecht, so geht die untere Schutzplatte wohl durch die Bohrung hindurch, der freihängende Zylinder aber klemmt. Die ganze Zentrierung und Aufstellung ist in 5 bis 6 Minuten zu erledigen. Solange man den Apparat nicht verrückt, kann man eine Messung nach der anderen machen, ohne eine neue Zentrierung vornehmen zu müssen, da durch die Schwalbenschwanzführung der innere Zylinder stets senkrecht gehoben und wieder gesenkt wird. Ferner hat man durch das glatte Einfahren des Innenzylinders durch die Schablone auch noch eine Kontrolle darüber, dass der Apparat senkrecht steht.

Die Eichung des Apparates geschah in üblicher Weise durch die Bestimmung der Schwingungsdauer des inneren Zylinders allein und nach seiner Belastung mit Messingzylindern vom bekannten Trägheitsmoment.

Schubspannungs- und Geschwindigkeitsverteilung im Couette-Apparat.

Es ist schon von Wo. Ostwald darauf hingewiesen worden, dass die Geschwindigkeitsverteilung zwischen den koaxialen Zylindern des Couette-Apparates nicht linear ist, auch bei der Untersuchung normaler Flüssigkeiten. Die Abweichung von der Linearität hängt von der Form des Apparates ab. Im folgenden wird kurz eine Ableitung gegeben für die Verteilung der Schubspannung und der Geschwindigkeit bei normalen Flüssigkeiten.

a) Schubspannungsverteilung.

An der Oberfläche des inneren Zylinders greift ein Moment an, das ihn verdreht. Seine Grösse ist

$$M = R_1 \cdot 2\pi R_1 \cdot h \cdot \tau.$$

Die Verteilung der Schubspannungen in Abhängigkeit vom Radius findet man aus der Bedingung, dass das Moment für jeden Radius den gleichen Wert haben muss. Wir bedienen uns bei der Ausrechnung folgender Bezeichnungen:

τ = Schubspannung,
R_1 = innerer Halbmesser,
R_0 = äusserer Halbmesser,
r = veränderlicher Halbmesser,
h = Höhe des Zylinders,
η = Zähigkeit,
v = Geschwindigkeit,
v_0 = Geschwindigkeit des äusseren Zylinders,
$R_0 - R_1 = \Delta r_0$; $r = R_1 + \Delta r$.

Man findet so:

$$M = r \cdot 2 \cdot \pi r h \cdot \tau = \text{const}; \qquad \tau = \frac{K_1}{r^2}.$$

Um ein möglichst übersichtliches Bild zu erhalten, wollen wir alle Grössen dimensionslos darstellen. Die Schubspannung am äusseren Zylinder ist:

$$\tau_0 = \frac{K_1}{R_0^2},$$

und für das Verhältnis der Schubspannung τ zu der am äusseren Rande τ_2 erhalten wir:

$$\frac{\tau}{\tau_0} = \frac{R_0^2}{r^2} = \frac{(R_1 + \Delta r_0)^2}{(R_1 + \Delta r)^2},$$

$$\frac{\tau}{\tau_0} = \frac{\left(\frac{R_1}{\Delta r_0} + 1\right)^2}{\left(\frac{R_1}{\Delta r_0} + \frac{\Delta r}{\Delta r_0}\right)^2}.$$

Zur weiteren Übersichtlichkeit fügen wir noch die Bezeichnungen ein:

$$\frac{\Delta r}{\Delta r_0} = x; \quad \frac{R_1}{\Delta r_0} = A.$$
$$0 \leqq x \leqq 1.$$

So erhalten wir als Endformel:

$$\frac{\tau}{\tau_0} = \frac{(A+1)^2}{(A+x)^2} = \frac{\left(1+\frac{1}{A}\right)^2}{\left(1+\frac{x}{A}\right)^2}.$$

Man sieht also, dass die dimensionslos gemachte Schubspannungsverteilung allein abhängt von den durch den Parameter A gegebenen Abmessungen des Apparats. A ist aber das Verhältnis des inneren Halbmessers zur Spaltweite. Damit man sich von den Abweichungen der Schubspannung von der Linearität ein anschauliches Bild machen kann, ist ihre Verteilung für $A = 20$, 10, 5, 3 und 2 berechnet worden.

Tabelle 2. Schubspannungsverteilung im Couette-Apparat.

$$x = \frac{\Delta r}{\Delta r_0}; \quad \frac{R_1}{\Delta r_0} = A; \quad \tau_0 = 100.$$

					$A = 20.$					
x :	0·0	0·1	0·2	0·3	0·4	0·5	0·6	0·7	0·8	0·9
$\frac{\tau}{\tau_0}$:	110·3	109·1	108	107	106	105	104	103	102	101
					$A = 10.$					
x :	0·0	0·1	0·2	0·3	0·4	0·5	0·6	0·7	0·8	0·9
$\frac{\tau}{\tau_0}$:	120·1	117·7	115·4	113	111	109	107	105	103	101
					$A = 5.$					
x :	0·0	0·1	0·2	0·3	0·4	0·5	0·6	0·7	0·8	0·9
$\frac{\tau}{\tau_0}$:	144	138·4	133·1	128·2	123·5	119	114·8	110·8	107	103·4
					$A = 3.$					
x :	0·0	0·1	0·2	0·3	0·4	0·5	0·6	0·7	0·8	0·9
$\frac{\tau}{\tau_0}$:	177·8	166·5	156·3	146·9	138·4	130·5	123·5	116·9	110·8	104·2
					$A = 2.$					
x :	0·0	0·1	0·2	0·3	0·4	0·5	0·6	0·7	0·8	0·9
$\frac{\tau}{\tau_0}$:	225·0	204·1	186·0	170·1	156·3	144·0	133·1	123·5	114·8	107·0

b) Geschwindigkeitsverteilung.

Ganz ähnlich berechnet sich die Geschwindigkeitsverteilung für eine normale Flüssigkeit. Man geht wieder von der gleichen Beziehung aus wie oben, in der man für τ einführt $\eta \frac{dv}{dx}$:

$$2\pi r \cdot \frac{dv}{dr} \cdot h \cdot r \cdot \eta = \text{const}, \qquad \frac{dv}{dr} = +\frac{K_1}{r^2}, \qquad v = -\frac{K_1}{r} + K_2, \qquad v_0 = -\frac{K_1}{R_0} + K_2.$$

Aus der Bedingung, dass die Flüssigkeit am inneren Zylinder ruhen soll, ergibt sich eine Beziehung zwischen den beiden Konstanten K_1 und K_2:

$$0 = -\frac{K_1}{R_1} + K_2$$

$$K_2 = +\frac{K_1}{R_1}.$$

Hiermit erhalten wir für die Geschwindigkeit am äusseren Zylinder:

$$v_0 = -\frac{K_1}{R_0} + \frac{K_1}{R_1} = K_1\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_0}\right)$$

und können jetzt K_1 durch v_0 und die beiden Halbmesser ausdrücken:

$$K_1 = v_0 \frac{R_0 R_1}{(R_0 - R_1)}.$$

Für die Geschwindigkeit v ergibt sich so:

$$v = -v_0 \frac{R_1 \cdot R_0}{R_1 - R_0} \cdot \frac{1}{r} + v_0 \frac{R_0}{R_1 - R_0}.$$

Führen wir jetzt wieder die Abkürzung x und A ein, so erhalten wir, wenn wir wieder die dimensionslose Darstellung wählen:

$$\frac{v}{v_0} = -\frac{R_1 (R_1 + \Delta r_1)}{\Delta r_0} \cdot \frac{1}{R_1 + \Delta r} + \frac{R_1 + \Delta r_1}{\Delta r_0}$$

$$\frac{v}{v_0} = \left(1 + \frac{R_1}{\Delta r_0}\right)\left(1 - \frac{1}{1 + \dfrac{\Delta r_0}{\dfrac{R_1}{\Delta r}}}\right)$$

$$\frac{v}{v_0} = (1 + A)\left(1 - \frac{1}{1 + \frac{x}{A}}\right).$$

Die Geschwindigkeit hängt also ebenfalls nur ab von der verhältnismässigen Spaltweite des Apparats. Für die gleichen Werte von A wie oben wurde die Verteilung ausgerechnet und in Zahlentafeln wiedergegeben. Der üblichen Ausführung des Couette-Apparats entspricht ein Wert von $A = 5$.

Tabelle 3. Geschwindigkeitsverteilung im Zähigkeitsmesser nach Couette, in Abhängigkeit von der verhältnismässigen Spaltweite.

$A = 20.$

x : 1	0·9	0·8	0·7	0·6	0·5	0·4	0·3
$\frac{v}{v_0}$: 1	0·905	0·808	0·711	0·612	0·512	0·412	0·310
x : 0·20	0·10	0·05	0·025	0·010	0·0		
$\frac{v}{v_0}$: 0·208	0·104	0·052	0·026	0·0105	0·0		

Tabelle 3 (Fortsetzung).

$A = 10.$

x : 1	0·9	0·8	0·7	0·6	0·5	0·4	0·3
$\frac{v}{v_0}$: 1	0·908	0·825	0·720	0·623	0·524	0·423	0·320
x : 0·2	0·1	0·05	0·025	0·010	0·0		
$\frac{v}{v_0}$: 0·216	0·109	0·055	0·027	0·0105	0·0		

$A = 5.$

x : 1	0·95	0·90	0·8	0·7	0·6	0·5	0·4
$\frac{v}{v_0}$: 1	0·958	0·916	0·828	0·737	0·643	0·545	0·444
x : 0·3	0·2	0·1	0·05	0·025	0·010	0·0	
$\frac{v}{v_0}$: 0·340	0·230	0·118	0·059	0·030	0·012	0·0	

$A = 3.$

x : 1	0·95	0·90	0·8	0·7	0·6	0·5	0·4
$\frac{v}{v_0}$: 1	0·962	0·923	0·828	0·737	0·667	0·571	0·471
x : 0·3	0·2	0·1	0·05	0·025	0·010	0·0	
$\frac{v}{v_0}$: 0·364	0·250	0·129	0·066	0·033	0·013	0·0	

$A = 2.$

x : 1	0·95	0·90	0·8	0·7	0·6	0·5	0·4
$\frac{v}{v_0}$: 1	0·966	0·931	0·857	0·778	0·692	0·600	0·500
x : 0·3	0·2	0·1	0·05	0·025	0·016	0·010	0·0
$\frac{v}{v_0}$: 0·392	0·273	0·143	0·074	0·037	0·024	0·015	0·0

III. Die Durchführung der Messungen.

A. Die Herstellung der Gelatinelösung.

a) Auflösung.

Wie bereits oben erwähnt wurde, benötigt man zur Durchführung einer Messung ungefähr 300 Liter Flüssigkeit. Da der Vorratskasten nicht direkt geheizt werden konnte, wurden die Lösungen in Mengen von je 50 Litern in einem Kupferkessel hergestellt. Dieser war durch Ammonrhodanid mit einer Schutzschicht von Kupferrhodanid überzogen, wie es in der Färberei üblich ist. Die Gelatinelösungen, um die es sich hier vorwiegend handelt, wurden derart hergestellt, dass die nötige Menge der pulverförmigen Gelatine 1 Tag lang in Wasser angequollen wurde. Dann wurde der Vorratskasten mit etwa 250 Liter Wasser gefüllt, die eine Temperatur von über 40° hatten. Die angequollene Gelatine wurde in 50 Liter Wasser von 80° aufgelöst und dann

zum Wasser hinzugefügt. Die Lösung wurde im Vorratskasten einige Tage belassen, bevor sie verwendet wurde. Ihre Zähigkeit wurde mit einem kleinen Kapillarviscosimeter dauernd verfolgt.

b) Sterilisierung.

Sterilisiert wurde durch Einrühren von Toluol. Wenn dies alle 3 Tage wiederholt wurde, erwiesen sich die Lösungen als hinreichend haltbar.

Da die Abkühlungsbedingungen nicht genügend beherrscht werden konnten, bildeten sich zuweilen Gallerten; dann musste die gesamte Lösung auf über 40° erwärmt werden. Oft war es kaum möglich, durch die Sinnesprüfung und durch das Kapillarviscosimeter zu unterscheiden, ob man noch ein Sol oder schon eine Gallerte vor sich hatte.

Sofort zu entscheiden zwischen Gallerte und Sol war hingegen, wenn man Durchflussversuche anstellte. Hatte man es mit einem Sol zu tun, so erhielt man die üblichen, mit dem treibenden Druckgefälle anwachsenden Durchflussmengen. Das Manometer stand vollkommen ruhig während der Messung, zu jedem Druck gehörte eindeutig eine bestimmte Durchflussmenge. Hatte sich indessen eine Gallerte gebildet, so zeigte das Manometer ausserordentlich starke Schwankungen, die ein Viertel bis die Hälfte des ganzen Standes ausmachten, und dies, obgleich die Gallerte in der Flügelpumpe kräftig durchgewirbelt und zerrissen war. Auch die Sole zeigten Anomalien, wenn sie sofort nach dem Hochpumpen untersucht wurden. Demnach können auch bei Gelatine die Anomalien nicht auf grössere Strukturen zurückgeführt werden, die in der Pumpe zerstört werden müssten. Diese vorläufigen Beobachtungen liessen die Ausführung der geplanten Versuche möglich erscheinen.

B. Die Durchführung eines kennzeichnenden Versuchs.

Das Einsetzen des Rohres.

Die Durchführung eines kennzeichnenden Versuchs sei jetzt ausführlich beschrieben.

Bei Messungen im laminaren Gebiet kommt es sehr darauf an, dass das Versuchsrohr gut ausgerichtet ist. Eine Krümmung des Rohres führt dazu, dass das Geschwindigkeitsmaximum aus der Rohrachse herausläuft und man bei der Messung keine symmetrische Geschwindigkeitsverteilung erhält.

Das Rohr wurde zuerst mit seinem Gewinde in den Messkasten eingeschraubt und dann mit der Überfangmutter am Weisbach-Apparat befestigt. Mit Hilfe einer Libelle wurde das Rohr durch Verstellung des Messkastens genau waagerecht gestellt.

Nachdem das Rohr eingesetzt und ausgerichtet war, wurde der Weissbach-Apparat mit Wasser gefüllt und die Mitte des Rohres aufgesucht.

Eine Kontrolle war dadurch möglich, dass man die laminare Geschwindigkeitsverteilung mit Wasser aufnahm. Die gemessenen Werte mussten symmetrisch zur Mitte liegen und mit den berechneten übereinstimmen. Dann war die Mitte richtig bestimmt und das Rohr gut ausgerichtet. Bei dem 1 cm-Rohr wurde zuweilen darauf verzichtet, die ganze Geschwindigkeitsverteilung aufzunehmen, da schon bei einer verhältnismässig geringen Geschwindigkeit Turbulenz eintrat und deshalb die Messungen nicht sehr genau waren. Man konnte sich dann damit begnügen, die Geschwindigkeit in der Mitte zu bestimmen. Bei der laminaren Strömung einer normalen Flüssigkeit ist die Maximalgeschwindigkeit gerade das Doppelte der mittleren Geschwindigkeit. Da die Messgenauigkeit, wie oben dargelegt, bei höheren Geschwindigkeiten verhältnismässig genauer ist, war diese Probe hinreichend, namentlich wenn auch noch an zwei symmetrisch zur Mitte gelegenen Punkten die Geschwindigkeit gemessen wurde.

In der Tabelle 4 ist die laminare Geschwindigkeit dimensionslos aufgetragen. Das heisst: die Geschwindigkeiten sind auf die Maximalgeschwindigkeit, die Entfernungen x von der Rohrachse auf den Halbmesser als Einheit bezogen. In der Tabelle 12b ist eine Messung der laminaren Geschwindigkeitsverteilung wiedergegeben.

Tabelle 4. Parabolische Geschwindigkeitsverteilung, dimensionslos dargestellt.

x:	0·0	0·1	0·2	0·3	0·35	0·4	0·45	0·5	0·55	0·6	0·65
$\frac{v}{v_m}$:	100	99	96	91	87·8	84	79·7	75	69·9	64	59·5
x:	0·7	0·75	0·8	0·825	0·85	0·875	0·9	0·925	0·95	0·975	
$\frac{v}{v_m}$:	51	44	36	32	28	22·5	19	14·8	10	5	

Die Durchführung der Messungen.

War so alles in Ordnung befunden worden, so wurde zur eigentlichen Messung an der Gelatinelösung geschritten. Das Wasser wurde vollständig aus dem Weissbach-Apparat entfernt und die Gelatinelösung eingefüllt. Dann wurden mit dieser zuerst Durchflussversuche gemacht, um über die Grösse der Anomalien Aufschluss zu erhalten.

Hierbei wurden bestimmte Durchflussmengen am Abschlusshahn des Messkastens eingestellt. Gemessen wurden sie mit Messgläsern und Stoppuhr. Bei den kleinen Durchflussmengen wurden bis zu 40 Sekunden, bei den höheren Geschwindigkeiten nach Möglichkeit 10 bis 20 Sekunden genommen. Da alle Versuche von

einem Beobachter allein durchgeführt wurden, verlangten sie zwar einen erheblich grösseren Zeitaufwand, als wenn man mit Hilfskräften gearbeitet hätte. Dafür entschädigte die erreichte höhere Genauigkeit. So konnten die Durchflussmengen auf 1 bis 2% genau gemessen werden. Jede Messung wurde vier- bis fünfmal wiederholt. Zwischen den einzelnen Messungen wurde jedesmal das Manometer abgelesen und die Messstellen gespült, wie es oben beschrieben worden ist. Dabei war darauf zu achten, dass das Manometer sofort von den Messstellen getrennt wurde, nachdem man es zu dem vermuteten Stand geführt hatte.

Ergebnisse der Mengenmessung an Gelatine und Baumwollgelb.

Wie aus den Tabellen 5 und den Fig. 5 ersichtlich ist, bekommt man auch bei diesen Messungen Kurven von derselben Form, wie sie bisher bekannt waren. Sie scheinen am Anfang sowie bei hohen Geschwindigkeiten ziemlich gerade zu sein. Benutzt man aber ein Mikromanometer, so kann man auch schon am Anfang, bei kleinen Geschwindigkeiten, eine deutliche Krümmung feststellen. Man sieht ferner (Tabelle 5a, b, Fig. 5), dass die Gelatine durch das Hochpumpen in den Weissbach-Apparat verändert wird: sie wird sehr deutlich dünnflüssiger. Trotzdem bleibt die Anomalie erhalten. Für die Messungen hat diese Empfindlichkeit den Nachteil, dass man nicht an der gleichen Flüssigkeit die Geschwindigkeitsverteilung und die Abhängigkeit der Durchflussmenge vom Druck feststellen kann. Die Messungen vermögen aber doch darüber zu entscheiden, ob wirklich ein fester Zylinder um die Rohrachse herum vorhanden ist.

Tabelle 5. Durchflussversuche an Gelatinelösung.
p in Millimeter Wassersäule. Q (Durchflussmenge) in Kubikzentimeter pro Sekunde.

a) 0·4% ige Lösung; seit 3 Tagen im Apparat.

Δp:	0·95	1·35	1·55	1·80	2·2	2·75	4·8	8·85
Q:	0·27	0·31	0·46	0·55	0·85	1·23	2·8	6·3

b) Dieselbe Lösung, frisch hochgepumpt.

Δp:	0·15	0·55	2·15	4·65	6·85	9·5	12·1
Q:	0·18	0·47	1·9	4·3	6·8	10	12·8

c) Neue Lösung, 0·4% ig, frisch hochgepumpt.

Δp:	0·4	0·5	0·75	0·85	1·05	2·95	3.35	3·5
Q:	0·16	0·20	0·33	0·37	0·44	1·50	1·70	1·76
Δp:	6·5	6·75	13·55	19·3	23·5	27·00	31.25	
Q:	3·5	3·7	9·0	14	18	21·5	26	

Tabelle 6. Durchflussversuche an Baumwollgelblösung.

a)	Δp:	0·76	0·94	1·1	1·23	1·46	2·1	2·3	2·5
	Q:	3·6	4.6	6·1	7·0	9·1	16·6	18.75	23·0
b)	Δp:	1·3	1·5	2·05	2·5	3·4	4·75	9·6	
	Q:	8·6	9·2	16·7	22·5	35	52	100	

Zu Versuch a) war die Lösung seit 4 Tagen im Apparat, zu Versuch b) wurde sie frisch hochgepumpt.

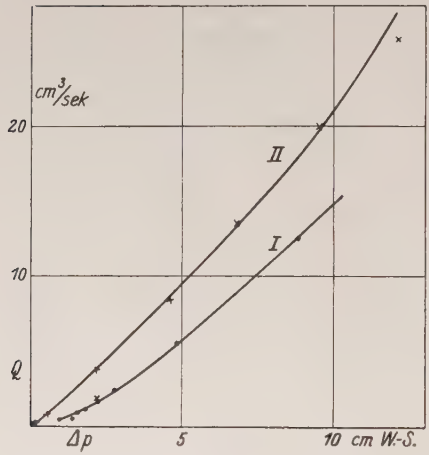

Fig. 5.

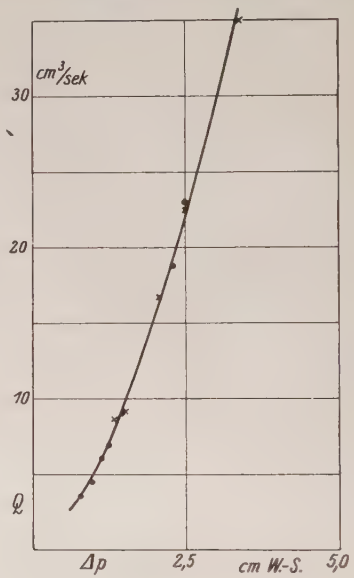

Fig. 6.

Fig. 5. Durchflussmengen an Gelatine.

Schaulinie I: Messungen an einer 0·4 % igen Gelatinelösung, die einige Tage ruhig im Weissbach-Apparat gestanden hatte. Schaulinie II: Messungen an derselben Lösung, gleich nachdem sie in den Weissbach-Apparat gepumpt worden war.

Fig. 6. Durchflussmessungen an Baumwollgelb.

Die mit Punkten eingezeichneten Messungen wurden an der Lösung gemacht, die einige Tage ruhig im Weissbach-Apparat gestanden hatte, die mit einem Kreuz gezeichneten Werte wurden an einer frisch hochgepumpten Lösung gewonnen. Aus der Figur geht hervor, dass eine salzhaltige Baumwollgelblösung durch das Pumpen nicht verändert wird.

Auch die Durchflussmessungen an Baumwollgelblösungen (Tabelle 6, Fig. 6) zeigen das gewohnte Bild. Diese Lösungen waren ausserdem weniger veränderlich als die Gelatine, die nach 1tägiger Ruhe im Weissbach-Apparat deutlich zäher geworden ist. Infolgedessen eignet sich das Baumwollgelb zu einer genauen Durchführung besser

als Gelatine. Besonders die vergleichenden Messungen der scheinbaren Zähigkeit im Rohr und im COUETTE-Apparat bei gleichen Geschwindigkeitsgradienten müssen an Baumwollgelb durchgeführt werden.

Nachdem die Durchflussversuche beendigt waren, wurde die Messung der Geschwindigkeitsverteilung in Angriff genommen. Zahlreiche Versuche wurden in dem 6 mm-Rohr durchgeführt mit einem PITOT-Rohr von 0·8 mm Durchmesser. Von diesen Messungen seien nur einige wiedergegeben. Da das Rohr verhältnismässig eng und das PITOT-Rohr etwas weit war, sind diese Versuche nicht sehr genau. Jedoch konnte schon aus ihnen entnommen werden, dass die Geschwindigkeitsverteilung einer abnormen Flüssigkeit von einer Parabel nicht allzu sehr abweicht und dass man von einer Festigkeit bei ihnen nicht sprechen kann.

Zur Frage der Fliessfestigkeit.

Nach den Ansätzen von BINGHAM, SZEGVARI, REINER u. a.[1]) sollen die Abweichungen vom HAGEN-POISEUILLEschen Gesetz dadurch bedingt sein, dass die abnormen Flüssigkeiten in Wirklichkeit feste Körper sind. Infolgedessen fliesst die strömende Masse, vor allem am Rande des Rohres, während in der Mitte ein fester Pfropfen sich befindet, der mit steigender Strömungsgeschwindigkeit, d. h. Schubspannung, immer mehr zusammenschmilzt. Den Halbmesser dieses festen Zylinders kann man aus den Durchflussversuchen berechnen. Da, wie erwähnt, die Eigenschaften der Gelatinelösungen sehr durch die mechanische Behandlung beeinflusst werden, wurden die Durchflussmessungen zur Berechnung verwandt, die nach den Messungen der Geschwindigkeitsverteilung gemacht worden waren. Dabei war die Flüssigkeit durch das nochmalige Hochpumpen sehr beansprucht worden, so dass der errechnete Halbmesser sicher kleiner war, als wenn man die Durchflussversuche an einer Lösung gemacht hätte, die die gleichen Eigenschaften hatte wie die, an der die Geschwindigkeitsverteilung gemessen war.

Berechnung des Halbmessers des festen Zylinders.

Die Berechnung des Halbmessers des starren Zylinders wurde folgendermassen ausgeführt:

[1]) Eine übersichtliche Zusammenstellung aller bisher gemachten Ansätze siehe bei O. KRAEMER und R. V. WILLIAMSON, J. Rheology 1, 83. 1929.

Die Durchflussmenge errechnete sich nach Reiner zu:

$$Q' = \frac{\pi a^4 p}{8 \eta l} \left(1 - \frac{4}{3} \frac{r_0}{a} + \frac{1}{3} \left(\frac{r_0}{a}\right)^4\right).$$

Hierin bedeutet r_0 den Halbmesser des festen Zylinders. Dieser hängt vom Druckgefälle ab:

$$r_0 = \frac{2l}{p} \mid \vartheta \mid .$$

ϑ ist die sogenannte „Fliessfestigkeit". Ersetzt man mit Hilfe der letzten Gleichung r_0 und führt noch den sogenannten „fiktiven" Zähigkeitskoeffizienten f ein, so erhält man, wenn man noch den Klammerinhalt gleich dem Verhältnis des fiktiven zum „echten" Zähigkeitskoeffizienten setzt:

$$\frac{f}{f'} = 1 - \frac{2{\cdot}667}{\Delta p} \cdot \frac{\vartheta l}{a} + \frac{5{\cdot}33\ldots}{\Delta p^4} \left(\frac{\vartheta l}{a}\right)^4.$$

Teilt man beide Seiten durch die Zähigkeit des Dispersionsmittels, so erhält man die relative Zähigkeit. Der Klammerausdruck gibt dann das Verhältnis der „scheinbaren" zur „echten" Zähigkeit an.

Zur numerischen Berechnung führen wir noch folgende Abkürzungen ein: Für die bei einem gegebenen Rohr gleichbleibende Konstante $2{\cdot}667 \cdot \frac{l}{a}$ setzen wir A. Den „echten" bzw. „fiktiven" relativen Zähigkeitskoeffizienten nennen wir f bzw. f'. Die kleinen beigeschriebenen Ziffern geben die Nummer des Versuchs an, der zur Berechnung verwendet wurde.

Wenn die Theorie von Reiner stimmt, so muss sich f als Konstante erweisen. Führen wir die angegebenen Abkürzungen ein, so erhalten wir:

$$f_1 = f_1' \left(1 - A \cdot \frac{\vartheta}{\Delta p_1}\right)$$

$$f_2 = f_2' \left(1 - A \cdot \frac{\vartheta}{\Delta p_2}\right)$$

$$f_1' - f_2' = A \frac{\vartheta}{\Delta p_1} f_1' - A \cdot \frac{\vartheta}{\Delta p_2} f_2' = A \vartheta \left(\frac{f_1'}{\Delta p_1} - \frac{f_2'}{\Delta p_2}\right)$$

$$\vartheta = \frac{(f_1' - f_2') \Delta p_1 \Delta p_2}{(\Delta p_2 f_1' - \Delta p_1 f_2') A}$$

$$f_1 = f_1' \left(1 - \frac{(f_1' - f_2') \Delta p_2}{\Delta p_2 f_1' - \Delta p_1 f_2'}\right)$$

$$f_1 = \frac{f_1' f_2' (\Delta p_2 - \Delta p_1)}{\Delta p_2 f_1' - \Delta p_1 f_2'}.$$

Ferner ist:

$$\vartheta = \frac{(f_i' - f_i) \Delta p_i}{A f_i'}$$

$$r_0' = \frac{2l}{\Delta p} \mid \vartheta \mid$$

$$\frac{r_0'}{a} = \frac{3}{4} \left(1 - \frac{f_i}{f_i'}\right).$$

Tabelle 7. Berechnung der Konstanten f und des Halbmessers r_0 des festen Zylinders nach M. Reiner.

Δp:	1·05	3·5	6·5	13·5	19·5	27·5
f':	10	8·5	7·8	6·45	5·55	5·4
f:	8·6	7·75	7·4	5·6	3·0	
$\frac{r_0}{Q}$:	0·057	0·066	0·096	0·19	0·375	

Aus der Tabelle 7 geht hervor, dass die „echte" Zähigkeit f auch schon für die ersten Messungen keine Konstante ist, sondern einen ausgesprochenen Gang zeigt. Mit zunehmendem Geschwindigkeitsgefälle nehmen die Werte ständig ab. Auch die mit den f'- und f-Werten berechneten Halbmesser des „festen Zylinders" wachsen mit zunehmendem Geschwindigkeitsgefälle stark an, anstatt abzunehmen. Für die in der Tabelle 8 wiedergegebenen Messungen wird der errechnete Halbmesser sogar 0·75 bzw. 1. Hieraus geht hervor, dass die angestellten Betrachtungen nicht von richtigen Voraussetzungen ausgegangen sind. M. Reiner hat denn auch allgemeinere Ansätze entwickelt, um diese Erscheinungen zu deuten[1]).

Tabelle 8. Geschwindigkeitsverteilung einer 0·4%igen Gelatinelösung.

a) Der Durchmesser des Versuchsrohrs bei 6 mm, der des Pitot-Rohrs 0·8 mm. Die mittlere Geschwindigkeit war 17·3 cm pro Sekunde, der Geschwindigkeitsgradient betrug 105 sec^{-1}. In der Spalte 1 ist die Stellung des Pitot-Rohrs an einer festen Millimeterteilung gegeben, Spalte 2 gibt die Entfernung von der Rohrachse an, Spalte 3 $\left(y = \frac{r}{a}\right)$ die dimensionslos gemachte Entfernung, Spalte 4 den Staudruck q, Spalte 5 die Strömungsgeschwindigkeit $\mathfrak{v}$, Spalte 6 die auf die gemessene Höchstgeschwindigkeit $\mathfrak{v}_m = 100$ bezogene Geschwindigkeit. Die für parabolische Geschwindigkeitsverteilung berechnete Höchstgeschwindigkeit ist 34·6 cm/sec. $Q = 4{\cdot}9$ cm^3/sec. $\frac{r_0}{a} \approx 0{\cdot}75$.

T.-Str.	r	y	q	$\mathfrak{v}$	$\frac{\mathfrak{v}}{\mathfrak{v}_m}$
6·4	− 2·2	− 0·73	0·09	13·3	47·5
6·9	− 1·7	− 0·57	0·20	19·8	70
7·4	− 1·2	− 0·4	0·30	24·2	86·2
7·9	− 0·7	− 0·23	0·36	26·6	96
8·4	− 0·2	− 0·07	0·40	28·0	100
8·9	+ 0·3	+ 0·1	0·38	27·3	97·5
9·4	+ 0·8	+ 0·27	0·33	25·4	90·5
9·4	+ 0·8	+ 0·27	0·32	25·0	89
9·9	+ 1·3	+ 0·44	0·28	23·4	83
10·4	+ 1·8	+ 0·6	0·17	18·2	65
10·9	+ 2·3	+ 0·77	0·04	8·85	31·5

[1]) Auf diese Arbeit wird in der Fortsetzung dieser Arbeit näher eingegangen werden.

Tabelle 8 (Fortsetzung).

b) Die mittlere Geschwindigkeit bei diesem Versuch war 35·25 cm/sec, der Geschwindigkeitsgradient 200 sec^{-1}. Die für parabolische Geschwindigkeitsverteilung berechnete Höchstgeschwindigkeit ist 70·5 cm/sec. $Q = 9{\cdot}9$ cm^3/sec. $\frac{r_0}{a} \approx 1$!

T.-Str.	r	y	q	$\mathfrak{v}$	$\frac{\mathfrak{v}}{\mathfrak{v}_m}$
5·9	— 2·75	— 0·92	0·05	9·9	16
6·4	— 2·25	— 0·75	0·5	31·2	51
6·9	— 1·75	— 0·59	0·96	43·4	59
7·4	— 1·25	— 0·42	1·30	50·5	82
7·9	— 0·75	— 0·25	1·63	56·5	92
8·4	— 0·25	— 0·08	1·80	59·5	97
8·75	+ 0·1	+ 0·03	2·0	62	100
8·9	+ 0·25	+ 0·08	1·90	61	99
9·4	+ 0·75	+ 0·25	1·75	58·5	95
9·9	+ 1·25	+ 0·41	1·3	50·5	82
10·4	+ 1·75	+ 0·58	1·0	44·2	72
10·9	+ 2·25	+ 0·75	0·4	28	45·5
11·4	+ 2·75	+ 0·91	0·1	14	22·7

c) Durchflussmessungen zu den vorstehenden Geschwindigkeitsprofilen der 0·4%igen Gelatinelösung.

Δp:	0·7	1·1	1·65	3·27	5·8	10·4	14·8	21
Q:	0·57	0·9	1·48	3·15	6·0	12·2	18·8	27·5
α:	5·3	5·22	4·8	4·45	4·14	3·73	3·37	3·27

Alle Messungen wurden an der frisch hochgepumpten Lösung gemacht.

Zur Bennennung der Eigenschaften abnormer Flüssigkeiten.

Bei dieser Gelegenheit mag noch kurz darauf eingegangen werden, dass über die Benennung der Eigenschaften dieser abnormen Flüssigkeiten vielfach keine Einigkeit besteht. Vielfach ist es üblich gewesen, von einer „Fliesselastizität" der Flüssigkeiten zu sprechen. Dies hat insofern seine Berechtigung, als bei vielen von ihnen das Auftreten von elastischen Kräften tatsächlich nachgewiesen ist. Es sei nur hingewiesen auf die Versuche von W. R. Hess, E. Hatschek, H. Freundlich u. a.[1]). Besonders wichtig scheinen die Versuche von R. Reiger[2]) und seinen Mitarbeitern zu sein. Sie massen die Schwingungszeit eines an einem dünnen Draht aufgehängten Zylinders, der in anscheinend noch flüssiger Gelatinelösung eintauchte. Wären diese Flüssigkeiten nur zähe, so würde die Schwingungszeit länger werden. Tatsächlich beobachtete man eine Verkürzung der Schwingungszeit, damit ist das Auftreten elastischer Kräfte in solchen Lösungen einwandfrei nachgewiesen. Mit Hilfe dieser Messungen konnte R. Reiger den Gelatinierungsvorgang ebenso verfolgen wie durch die Messung des Drehungsvermögens für polarisiertes Licht.

[1]) H. Freundlich und W. Seifriz, Z. physikal. Ch. **107**, 233. 1923. [2]) C. O. Seitz, Ber. physikal.-medizin. Soc. Erlangen **58/59**, 242. 1928.

Die Eigenschaft der Flüssigkeiten hingegen, die in den Theorien von BUCKINGHAM, REINER u. a. eine so grosse Rolle spielt, ist ebenfalls vielfach als Elastizität bezeichnet worden. Hiervon sollte man aber ein für allemal absehen. Von Elastizität darf man nur sprechen,

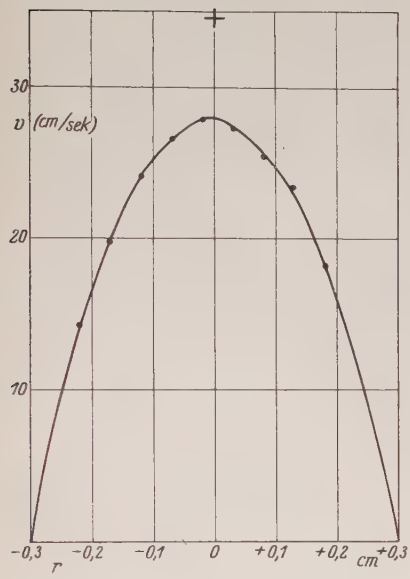

Fig. 7a.

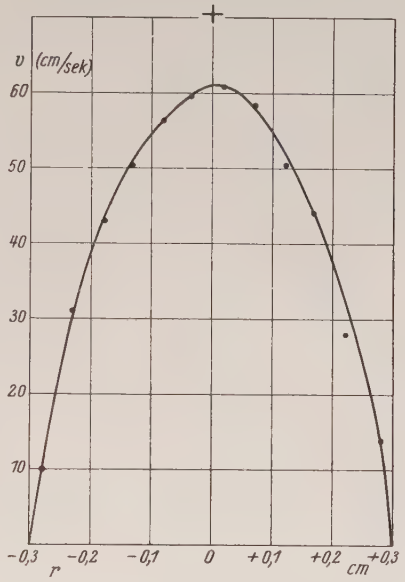

Fig. 7b.

Fig. 7a und 7b. Messungen der Geschwindigkeitsverteilung an einer Gelatinelösung bei zwei verschiedenen Strömungsgeschwindigkeiten. Die Figuren geben Messungen wieder, die an der gleichen Lösung kurz hintereinander gemacht worden sind. Die in Tabelle 8c wiedergegebenen Durchflussmessungen geben die Eigenschaften der Lösung während des Versuchs ziemlich zutreffend wieder. Da ein PITOT-Rohr von 0·8 mm Durchmesser in einem Versuchsrohr von 6 mm Durchmesser verwendet wurde, sind nur die Messungen in der Nähe der Achse ($r \sim 0{\cdot}15$ für Fig. 7a bzw. $r \sim 0{\cdot}25$ für Fig. 7b) hinreichend genau. Die Höchstgeschwindigkeit der parabolischen Verteilung gleicher Durchflussmenge ist durch ein Kreuz gekennzeichnet. Die Abweichung der gemessenen Höchstgeschwindigkeit von der berechneten beträgt 19% (Fig. 7a) bzw. 12% (Fig. 7b).

wenn die auftretenden Kräfte von der Entfernung eines Punktes aus seiner Ruhelage abhängen. Von Festigkeit ist zu reden, wenn man in einem Körper eine endliche Schubspannung aufrecht erhalten kann, ohne dass eine dauernde Bewegung von Teilen des Körpers gegeneinander notwendig ist. Bei den abnormen Flüssigkeiten aber kann man offenbar nur dann Schubspannung erzeugen, wenn man für eine Be-

wegung der Flüssigkeitsschichten gegeneinander sorgt. Eine Festigkeit ist ihnen daher nicht zuzusprechen. Hingegen ist es sehr wohl möglich, dass man in ihnen elastische Kräfte nachweisen kann. Schon die Beobachtung einer in einem Glase durcheinander gewirbelten Gelatinelösung zeigt, dass eine gewisse Elastizität da ist. Ist die Lösung normal geworden, so lassen sich in ihr keine merklichen elastischen Kräfte mehr nachweisen. So wurde eine Lösung im COUETTE-Apparat untersucht und zeigte auch bei ganz kleinen Schergeschwindigkeiten normales Verhalten. In dieser Lösung blieb die Schwingungsdauer des inneren Zylinders die gleiche wie in Luft. Elastische Kräfte waren also in ihr nicht mehr nachzuweisen.

Die endgültigen Messungen.

Nachdem die Versuchsanordnung verbessert worden war durch den Ersatz der Schlauchklemmen durch Hahnstücke, sowie durch Einsetzen eines engeren PITOT-Rohrs und eines weiteren Versuchsrohrs, wurden noch weitere Messungen der Geschwindigkeitsverteilung an Gelatine gemacht.

Die Vorgeschichte dieser Lösung war folgende: Ursprünglich war eine 0·4 % ige Lösung angesetzt worden. Da diese nicht zäh genug war, wurde die Konzentration auf 0·6 % gebracht. Die ganze Menge wurde auf 43° erwärmt und dann die hinzuzufügende Gelatinemenge in 50 Liter der 0·4 % igen Lösung bei 80° aufgelöst und sofort der Hauptmenge hinzugefügt. Die Abkühlung der Lösung wurde verfolgt und ist in der Tabelle 9 wiedergegeben.

Tabelle 9. Vorgeschichte der 0·6 % igen Gelatinelösung.

Tag:	1.	1.	1.	2.	2.	2.	2.
Zeit:	18 Uhr	21·5	23	12	15	17·5	23
Temperatur:	42°	35	33	23	21	19	18
α:					1·2		1·5
Tag:	3.	3.	4.	5.	5.	6.	7.
Zeit:	13 Uhr	17·5	13	10	21	19	16
Temperatur:	15°	14·5	13	12·5	11	10·5	10·2
α:	2		3·3	3·5	3·3	3	3

Am 7. Tage nach der Herstellung wurde mit den Messungen begonnen. Die Durchflussversuche an der frischen Lösung zeigt Tabelle 10 und Fig. 8, Schaulinie I. Die Anomalie war recht gut. Das weitere Rohr erlaubte, die Geschwindigkeit bis zur kritischen zu steigern, bei der das Einsetzen der Turbulenz zu erwarten war (die REYNOLDSsche

Zahl wurde mit der scheinbaren Zähigkeit errechnet). Die bei der höchsten Geschwindigkeit gemessene Durchflussmenge liegt auf dem Schaubild nicht im Zug der durch die vorhergehenden Messungen

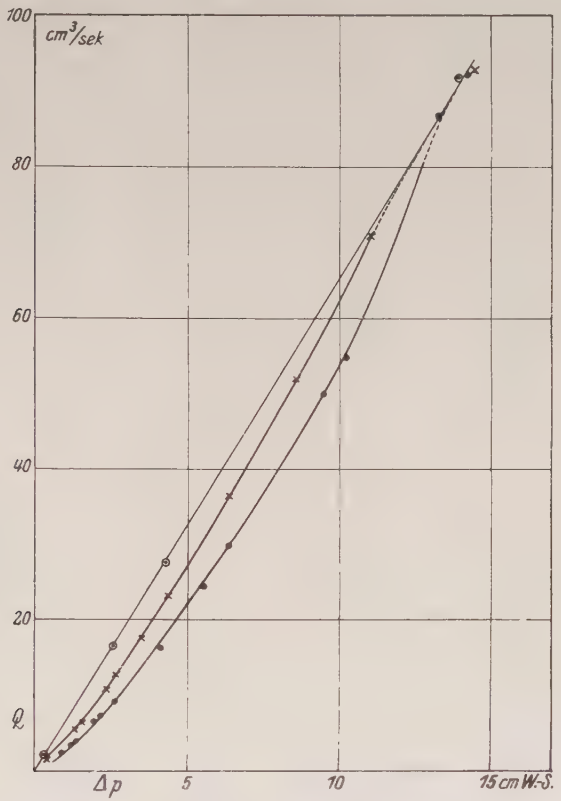

Fig. 8. Bestimmung der Durchflussmenge in ihrer Abhängigkeit vom treibenden Druck an einer Gelatinelösung.

Schaulinie I: Messung am 9. 12. 1929, Tabelle 10a. Schaulinie II: Messung am 17. 12. 1929, Tabelle 10b. Schaulinie III: Messung am 20. 12. 1929, Tabelle 10c. Aus der Figur ist ersichtlich, wie die Anomalie im Laufe der Zeit abnimmt, bis die Lösung normal geworden ist. Bemerkenswert ist, dass die Messpunkte zu dem höchsten Druck bei allen drei Messungen nahe zusammenliegen und annähernd auf der Geraden, die die Messung an der normalen Lösung wiedergibt.

bestimmten Linie. Sie liegt aber auf der Geraden, die durch den Nullpunkt und den vorhergehenden Messpunkt bestimmt ist. Das gleiche ist der Fall bei der einige Tage später vorgenommenen Messung der Durchflussmengen, die durch die Schaulinie II wiedergegeben werden.

Auch hier fällt der letzte Punkt heraus und liegt sehr nahe bei dem zur Schaulinie I gehörigen.

Tabelle 10.

Durchflussversuche an der 0·6%igen Gelatinelösung.

a) Messung am 9. 12. 29.

Δp	Q
0·95	2·57
1·25	3·5
1·4	4·1
2·0	6·6
2·2	7·35
2·65	9·3
4·2	16·5
5·6	24·4
6·4	30·0
9·5	50·0
10·3	55
13·1	84
13·3	87
14·3	92·5

b) Messung am 17. 12. 29.

Δp	Q
0·45	1·56
1·4	5·6
1·6	6·4
2·45	10·7
2·7	12·3
3·55	17·5
4·4	23·2
6·4	36·3
8·6	52
11·05	71
14·5	93

c) Messung am 20. 12. 29.

Δp	Q
0·35	2·15
2·6	16·5
4·35	27·5
14·0	92

Tabelle 11.

Messungen der Geschwindigkeitsverteilung an der 0·6%igen Gelatinelösung.

a) Der Durchmesser des Versuchsrohrs war 10 mm, der des PITOT-Rohrs 0·5 mm. Die für parabolische Geschwindigkeitsverteilung berechnete Höchstgeschwindigkeit ist 36 cm/sec. Der Geschwindigkeitsgradient ist 96 sec^{-1}. Die Bedeutung der einzelnen Spalten der Tabelle ist dieselbe wie in der Tabelle 8; jedoch ist der Staudruck q' in Teilstrichen des im Verhältnis 1:30 geneigten Mikromanometers gegeben. Für die Messung der kleineren Geschwindigkeiten wurde dem Manometer eine höhere Neigung bis zu 1:120 gegeben. $Q = 14{\cdot}1\ cm^3/sec$.

T.-Str.	r	y	q'	$\mathfrak{v}$	$\frac{\mathfrak{v}}{\mathfrak{v}_m}$
5·5	−4·5	−9	6·5	6·7	20·5
6·0	−4·0	−8	20	11·2	34·3
6·5	−3·5	−7	45	17·2	52·6
6·75	−3·25	−6·5	63	20·5	62·5
7·0	−3·0	−6	78	22·6	69
8·0	−2·0	−4	133	29·5	90
10·0	0	0	164	32·7	100
12·0	+2·0	+4	130	29·3	89·5
13·0	+3·0	+6	71	21·6	66
13·5	+3·5	+7	44	17·0	52
14·0	+4·0	+8	22	11·3	34·5

Tabelle 11 (Fortsetzung).

b) Messung an derselben Lösung. Die berechnete Höchstgeschwindigkeit für parabolische Verteilung ist 64·8 cm sec, der Geschwindigkeitsgradient 173 sec^{-1}. Der Staudruck q ist in Teilstrichen des im Verhältnis 1:10 geneigten Mikromanometers gegeben; ein Teilstrich entspricht 0·1 mm Geschwindigkeitshöhe. Die Lösung hatte ihre abnormen Eigenschaften gegenüber der Messung unter a) geändert (siehe Tabelle 10).

T.-Str.	r	y	q	$\mathfrak{v}$	$\frac{\mathfrak{v}}{\mathfrak{v}_m}$
5·35	−4·55	−9·1	2·7	9·4	16·5
5·9	−4·0	−8	17·5	20·3	35·7
6·9	−3·0	−6	74	38·8	68
8·9	−1·0	−2	156	55·3	97·5
9·9	−0	−0	164	57	100
10·9	+1·0	+2·0	159	56	97
11·9	+2·0	+4·0	131	51·7	91
12·5	+2·6	+5·2	106	45·6	80
12·9	+3·0	+6·0	77	38·9	70
13·5	+3·6	+7·2	44·5	30·2	53
14·0	+4·1	+8·2	20·5	20·8	36·5
14·5	+4·6	+9·2	5·5	12·1	21·5

Q: gemessen: **25·4** cm^3/sec.

Q: berechnet aus dem gemessenen Profil: **24·8** cm^3/sec.

Differenz: **2·5** %.

Es scheint also, dass die scheinbare Zähigkeit zuletzt nicht mehr abnimmt, sondern dass man das sogenannte Strukturgebiet durchschritten hat, und dass nun das Hagen-Poiseuillesche Gesetz gilt. Leider war es nicht möglich, die Geschwindigkeit noch weiter zu steigern und den Sachverhalt zu prüfen. An Kautschuklösungen konnte auch bei sehr grossen Geschwindigkeitsgradienten immer noch eine weitere Abnahme der scheinbaren Zähigkeit beobachtet werden.

Nach weiteren 3 Tagen zeigte die Lösung keine Zähigkeitsanomalien mehr. Die Abhängigkeit der Durchflussmengen vom Druck war linear. Die erhaltene Gerade ging durch den Nullpunkt und durch den bei den vorigen Messungen herausgefallenen höchsten Messpunkt. Dass die Turbulenz bei der berechneten Geschwindigkeit nicht gleich einsetzt, wird oft beobachtet. Wenn man alle Störungen sorgfältig vermeidet, kann man die laminare Strömung noch aufrecht erhalten bei Reynoldsschen Zahlen, die das Sechs- bis Zehnfache der kritischen betragen. Um den Einsatz der Turbulenz zu erzwingen, erzeugt man im Einlauf eine grosse Störung dadurch, dass man die

Verschlussscheibe des WEISBACH-Apparates ganz nahe an den Einlauf heranschiebt. Trotzdem änderten sich Durchflussmenge und Druck nicht sehr; es waren am Manometer nur ganz langsame und geringe Schwankungen zu beobachten.

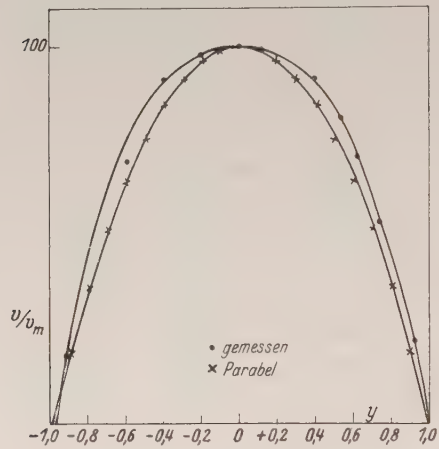

Fig. 9.

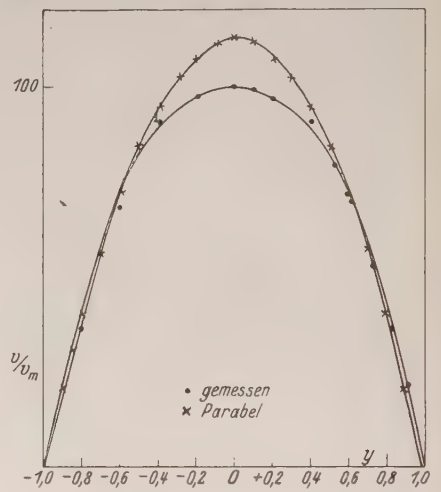

Fig. 10.

Fig. 9 und 10. Dimensionslose Darstellung einer gemessenen Geschwindigkeitsverteilung.

Auf beiden Figuren ist die in Tabelle 11 b wiedergegebene, an einer 0·6 % igen Gelatinelösung gemessene Geschwindigkeitsverteilung dimensionslos dargestellt. Zum Vergleich damit ist in Fig. 9 eine Parabel eingezeichnet, die einer Verteilung mit der gleichen Höchstgeschwindigkeit entspricht. In Fig. 10 ist die Parabel eingezeichnet, die einer laminaren normalen Geschwindigkeitsverteilung bei der gleichen Durchflussmenge entspricht. Aus Fig. 9 sieht man, dass die gemessene (durch Punkte gekennzeichnete) Verteilung bis $y = 0{\cdot}9$ oberhalb der parabolischen (durch Kreuze bezeichneten) liegt. Aus Fig. 10 geht hervor, wie sehr die gemessene Verteilung gegenüber der errechneten abgeflacht ist. Obwohl diese in der Mitte sehr viel unter der berechneten liegt und am Rande nur sehr wenig darüber, ergibt sich für beide Verteilungen dennoch die gleiche Durchflussmenge, weil y bei der Berechnung quadratisch eingeht.

Geschwindigkeitsverteilung im Übergangsgebiet.

Zur näheren Aufklärung wurde die Geschwindigkeitsverteilung bei diesen Bedingungen gemessen. Wie aus der Tabelle 13 hervorgeht, bekommt man bald solche Werte, die zu einer parabolischen Verteilung gehören, bald aber solche, die darauf hinweisen, dass das Geschwindigkeitsprofil gegenüber einer Parabel stark abgeflacht ist.

Der Strömungszustand ist also gerade auf der Grenze zwischen dem laminaren und dem turbulenten Gebiet. In der Tabelle sind die verschiedenen Messungen nicht in der Reihenfolge aufgeführt wie sie gemacht wurden, sondern nach den Abständen von der Rohrachse geordnet, damit man die Schwankungen der Geschwindigkeit an den einzelnen Punkten des Querschnittes deutlich sieht.

Man sieht an diesem Beispiel sehr gut, dass die Messung der Geschwindigkeitsverteilung weiterführt als die der Durchflussmengen allein.

Tabelle 12. Laminare Strömung einer normalen 0·6%igen Gelatinelösung.

a) Höchstgeschwindigkeit.

Berechnet:	128	163	198·5	240 cm/sec
Gemessen:	127	160	199	237 „

b) Geschwindigkeitsverteilung.

T.-Str.	r	y	q (cm)	$\mathfrak{v}$	$\frac{\mathfrak{v}}{\mathfrak{v}_m}$ gem.	$\frac{\mathfrak{v}}{\mathfrak{v}_m}$ ber.
10·0	0	0	8·2	127	100	100
11·0	+ 1·0	+ 0·2	7·6	122	96	96
11·5	+ 1·5	+ 0·3	7·1	118	93	91
11·9	+ 1·9	+ 0·38	6·2	110	86·5	86
12·5	+ 2·5	+ 0·5	4·9	98	77	75
13·5	+ 3·5	+ 0·7	2·4	66	52	51
14·0	+ 4·0	+ 0·8	1·1	46·5	36·5	36

Tabelle 13. Schwankungen des Strömungszustandes bei höheren Geschwindigkeiten.

T.-Str.	r	y	q (cm)	$\mathfrak{v}$
10·0	0	0	28·4	237
			22·4	210
6·0	— 4·0	— 0·8	5·35	102
			6·1	109
13·0	+ 3·0	+ 0·6	14·6	170
			15·5	174

Die Messungen der Geschwindigkeitsverteilung an der eben erwähnten Gelatinelösung sind in den Tabellen 10, 11 und 12, sowie auf der Fig. 9 wiedergegeben worden.

Die Zuverlässigkeit der Messungen und ihre Kontrolle.

Für die Zuverlässigkeit einer Geschwindigkeitsverteilungsmessung hat man zwei Proben. Einmal müssen die symmetrisch zur Mitte gelegenen Messungen die gleichen Werte ergeben. Ausserdem muss die aus dem Geschwindigkeitsprofil berechnete Durchflussmenge mit der gemessenen übereinstimmen. Die Berechnung geschieht graphisch. Man kann entweder das Geschwindigkeitsprofil als solches auftragen und den Inhalt des aus ihm bei der Umdrehung um die Achse entstehenden Körpers aus Kegelstümpfen zusammensetzen, deren Höhe und Halbmesser man aus dem gezeichneten Profil ermittelt (Fig. 10). Man kann auch so vorgehen, dass man die gemessenen Geschwindigkeiten nicht gegen den Halbmesser, sondern gegen sein Quadrat aufträgt. Bei dieser Art der Auftragung sieht man auch sofort, ob die Geschwindigkeitsverteilung parabolisch ist oder nicht. Im ersten Fall erhält man eine gerade Linie. Der Inhalt der von den beiden Koordinatenachsen und der Geschwindigkeitskurve umschlossenen Fläche ist bis auf einen Faktor gleich dem durchgeflossenen Volumen. Die Fig. 11 zeigt eine solche graphische Bestimmung der Durchflussmenge. Sie stimmt sehr gut mit der gemessenen überein. Eine so gute Übereinstimmung wie in diesem Fall findet man nicht stets. Da der Radius quadratisch eingeht, trägt ein Fehler der Geschwindigkeitsmessung in der Nähe der Wand unverhältnismässig viel zum Gesamtfehler bei; gleichzeitig sind die Messungen der kleineren Geschwindigkeiten schon an und für sich mit einem grösseren Fehler behaftet. Eine Übereinstimmung innerhalb ungefähr 5 bis 6% kann noch für genügend erachtet werden.

Die Bestimmung der Durchflussmenge aus dem Flächeninhalt der gegen das Quadrat des Halbmessers aufgetragenen Geschwindigkeitsverteilung kann man sich so plausibel machen:

Man denke sich den Umdrehungskörper, der die Geschwindigkeitsverteilung über dem Rohrquerschnitt darstellt, in eine grosse Anzahl von Hohlzylindern aufgeteilt. Dann ist die Durchflussmenge gleich der Summe des Inhalts aller Hohlzylinder:

$$Q = \sum_{i}^{i} Q_i .$$

Der Raum eines Hohlzylinders ist:

$$Q_i = \pi (R_{i+1}^2 - R_i^2) \cdot \bar{v}_i .$$

Hier bedeutet $\bar{v}_i$ die mittlere Geschwindigkeit in dem i-ten Hohlzylinder. Das auf der Fig. 11 schraffierte Stück ist demnach gleich $\frac{Q_i}{\pi}$; die Grundlinie ist ja gleich $R_{i+1}^2 - R_i^2$. Die Summe aller dieser Flächenstücke gibt also bis auf den Faktor π und einen vom Massstab abhängigen Faktor die gesamte Durchflussmenge an, wie oben behauptet wurde.

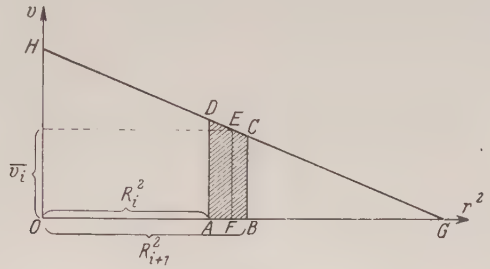

Fig. 11.

Beispiel: Für die Berechnung der Durchflussmenge aus der gemessenen Geschwindigkeitsverteilung:

Auf der Fig. 12 sind die gemessenen Werte durch Kreuze bezeichnet und durch eine Linie III verbunden. Ausserdem ist ein-

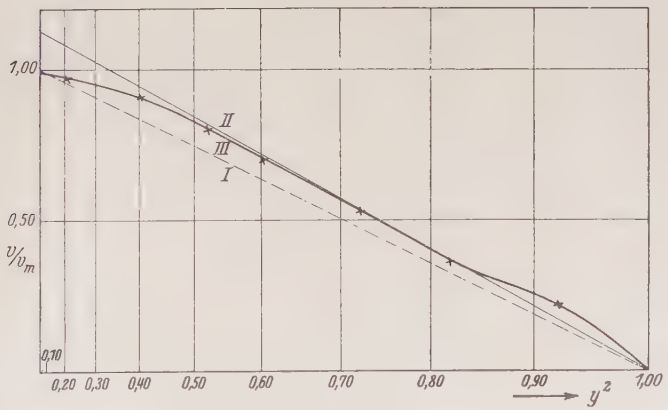

Fig. 12. Zeichnerische Bestimmung der Durchflussmenge.

Als Ordinate sind eingetragen die Werte von $\frac{v}{v_m}$, als Abszisse die Werte von y^2. Schaulinie I: Parabolische Geschwindigkeitsverteilung einer Strömung, die die gleiche Höchstgeschwindigkeit hat wie die gemessene. Schaulinie II: Parabolische Verteilung einer Strömung für die gleiche Durchflussmenge. Schaulinie III: Gemessene Geschwindigkeitsverteilung (Tabelle 11b).

getragen als Schaulinie I die Geschwindigkeitsverteilung einer normalen laminaren Strömung von gleicher Höchstgeschwindigkeit. Man sieht, dass die gemessenen Werte durchweg höher liegen. Als Schaulinie II ist die Geschwindigkeitsverteilung einer normalen Schichtenströmung eingetragen, die die gleiche Durchflussmenge ergibt wie die gemessene Verteilung. Die Höchstgeschwindigkeit ist hier bedeutend grösser: die gemessene Höchstgeschwindigkeit beträgt nur 88 % davon. Die Linie der gemessenen Verteilung nähert sich der Geraden I nur langsam und liegt erst für $y > 0{\cdot}85$ darüber. Da nach dem oben Gesagten eine höhere Geschwindigkeit in der Nähe der Rohrwand verhältnismässig viel zur Erhöhung der Durchflussmenge beiträgt, wird hier der anfangs auftretende (bis $y \sim 0{\cdot}4$) in die Augen fallende Fehlbetrag wieder ausgeglichen. Für abnorme Flüssigkeiten muss also bei der hier gewählten Art der Darstellung die Schaulinie der v stets einen Wendepunkt haben.

Der Massstab der Zeichnung ist so gewählt, dass dem Wert $y = 1$ eine Strecke von 20 cm entspricht; der gemessenen Höchstgeschwindigkeit von 57 cm entspricht eine Länge von 10 cm. Der Inhalt der von den Koordinatenachsen und der Schaulinie III umschlossenen Fläche ist $100{\cdot}5\ \text{cm}^2$. Um die Durchflussmenge in Kubikzentimeter zu erhalten, muss man diesen Wert ausser mit π noch mit einem Faktor multiplizieren, der sich aus den gewählten Massstäben bestimmt. Die Werte für v sind auf der Zeichnung im Verhältnis 1 : 5·7 verkleinert. Daher entsteht also ein Faktor 5·7. — Der Halbmesser des Rohrs beträgt in Wirklichkeit $^1/_2$ cm; sein Quadrat ist $^1/_4$ cm. Da er auf der Zeichnung auf 20 cm gedehnt ist, müssen die Werte von y^2 auf ein Achtzigstel verkleinert werden, um die Werte von r^2 in Quadratzentimeter zu erhalten.

Die $110{\cdot}5\ \text{cm}^2$ der Zeichnung werden also auf das richtige Mass zurückgeführt durch den Faktor:

$$\frac{\pi 5{\cdot}7}{80} = 0{\cdot}223.$$

Man findet so als Durchflussmenge:

$$Q = 24{\cdot}8\ \text{cm}^3/\text{sec}.$$

Gemessen sind

$$Q = 25{\cdot}4\ \text{cm}^3/\text{sec}.$$

Der Fehler beträgt also 2·5 %.

Berechnet man die Durchflussmenge durch Zerlegung des Geschwindigkeitsprofils in Kegelstümpfe, so ergibt sich eine fast vollkommene Übereinstimmung mit den gemessenen Werten, jedoch ist das eben angewandte Berechnungsverfahren genauer.

Besprechung der Ergebnisse.

Eine dimensionslose Darstellung der Geschwindigkeitsverteilung ist in der letzten Spalte der Tabellen gegeben. Die gemessene Höchstgeschwindigkeit ist jeweils gleich 100 gesetzt. Eine zeichnerische Darstellung gibt die Fig. 9. Hingegen ist in Fig. 13 das gemessene Geschwindigkeitsprofil verglichen mit der Geschwindigkeitsverteilung einer normalen Flüssigkeit bei der gleichen Durchflussmenge. Hier ist die Maximalgeschwindigkeit der parabolischen Verteilung gleich 100 angenommen. Man sieht, dass das Geschwindigkeitsprofil einer abnormen Flüssigkeit im Vergleich zu dem einer normalen abgeflacht ist. Dies muss stets der Fall sein, wenn die Schubspannung langsamer wächst als proportional mit dem Geschwindigkeitsgefälle. Auch auf diesen Figuren sieht man, dass von einem festen Zylinder nicht die Rede sein kann. Man wird sich also damit begnügen, dass die Schubspannung auch bei den abnormen Flüssigkeiten stets durch eine Bewegung hervorgerufen wird. Nur ist die Abhängigkeit bei den abnormen Flüssigkeiten eben eine andere als bei den gewöhnlichen. Die elastischen Eigenschaften treten bei den Strömungsvorgängen solcherart, wie sie hier untersucht worden sind, nicht in Erscheinung. Ein theoretischer Zusammenhang zwischen elastischen Kräften und Abweichungen vom Hagen-Poiseuilleschen Gesetz scheint bisher nicht zu bestehen. Daher erscheint es zweckmässig, vorerst von der scheinbaren Zähigkeit der abnormen Flüssigkeiten zu sprechen wie bisher.

Zusammenfassung.

1. Es werden Versuchsanordnungen beschrieben, die ermöglichen, die Geschwindigkeitsverteilung in strömenden abnormen Kolloiden im Rohr, zwischen parallelen Wänden und im Couette-Apparat zu untersuchen. Die Geschwindigkeitsverteilung im Couette-Apparat wird für normale Flüssigkeiten und für verschiedene Spaltweiten des Apparates berechnet, ebenso die Schubspannung. Die Ergebnisse sind in Tabellen wiedergegeben.

2. Es werden Durchflussversuche und Geschwindigkeitsmessungen an abnormen Kolloiden, insbesondere Gelatine, mitgeteilt. Es

ergab sich, dass die Geschwindigkeitsverteilung gegenüber der einer normalen Flüssigkeit abgeflacht ist, wie es zu erwarten war. Kolloide, die keine Zähigkeitsanomalien zeigen, strömen wie normale Flüssigkeiten.

Die Untersuchung wird an anderen Systemen fortgeführt.

Diese Arbeit wurde ausgeführt mit Unterstützung der Deutschen Forschungsgemeinschaft, der ich auch für die Gewährung eines Forschungsstipensdiums zu danken habe.

Die Versuche wurden durchgeführt im Institut für angewandte Mechanik der Universität Göttingen. Herrn Prof. Dr. L. Prandtl danke ich für die Bereitstellung der Institutsmittel, sowie sein Interesse an dieser Arbeit.

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.